ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Università degli Studi di Roma Tre

FACOLTÀ DI MATEMATICA

APPUNTI INTEGRATIVI

Analisi IV

AM220

Di:
Edoardo Signorini

A.A. 2015–2016, Semestre II

INDICE

1 | CALCOLO IN PIÙ DIMENSIONI

1.1 CONTRAZIONI

Teorema 1.1 – Contrazioni

Sia X uno spazio metrico completo e sia $f\colon X \to X$ una mappa tale che

$$\exists\, k \in [0,1) : d\big(f(x), f(y)\big) \leqslant k\, d(x,y),\ \forall\, x, y \in X,$$

allora:

$$\exists!\, \bar{x} \in X : f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Dimostrazione. La strategia consiste nel dimostrare che f iterata in un punto è una successione di Cauchy, per poi dimostrare che, tramite la completezza, essa converge al punto fisso. Prima di mostrare ciò, andiamo a dimostrare le seguenti osservazioni:

$$d\big(f^n(x), f^n(y)\big) \leqslant k^n d(x,y) \tag{1.1}$$

ciò segue immediatamente dalla lipschitzianità di f, infatti

$$\begin{aligned} d\big(f^n(x), f^n(y)\big) &= d\big(f \circ f^{n-1}(x), f \circ f^{n-1}(y)\big) \\ &\leqslant k\, d\big(f^{n-1}(x), f^{n-1}(y)\big) \leqslant \dots \\ &\leqslant k^n d(x,y). \end{aligned}$$

itero il procedimento

Verifichiamo inoltre che

$$d(x,y) \leqslant \frac{1}{1-k}\Big[d\big(x, f(x)\big) + d\big(y, f(y)\big)\Big] \tag{1.2}$$

infatti per la disuguaglianza triangolare si ha

$$d(x,y) \leqslant d\big(x, f(x)\big) + d\big(f(x), f(y)\big) + d\big(f(y), y\big),$$

da cui applicando la lipschitzianità a $d\big(f(x), f(y)\big)$ otteniamo

$$d(x,y) \leqslant d\big(x, f(x)\big) + k\, d(x,y) + d\big(f(y), y\big),$$

da cui la (1.2). Osserviamo che l'ultima formula ci garantisce, se esiste, l'unicità del punto fisso. Infatti, se per assurdo tale punto non fosse unico, ovvero

$$\exists\, \bar{x}, \bar{y} \in X : f(\bar{x}) = \bar{x} \text{ e } f(\bar{y}) = \bar{y},$$

si avrebbe

$$d(\bar{x}, \bar{y}) \overset{(1.2)}{\leqslant} \frac{1}{1-k}\Big[d\big(\bar{x}, f(\bar{x})\big) + d\big(\bar{y}, f(\bar{y})\big)\Big],$$

ovvero, per come sono stati presi $\bar{x}$ ed $\bar{y}$,

$$d(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant \frac{1}{1-k}\Big[d\big(\bar{x}, \bar{x}\big) + d\big(\bar{y}, \bar{y}\big)\Big] = 0,$$

per cui $\bar{x} = \bar{y}$.
Mostriamo ora che, preso $x_0 \in X$, avremo che $x_n = f^n(x_0)$ è una successione di Cauchy:

$$\begin{aligned} d\big(f^n(x_0), f^m(x_0)\big) &\overset{(1.2)}{\leqslant} \frac{1}{1-k}\Big[d\big(f^n(x_0), f \circ f^n(x_0)\big) + d\big(f^m(x_0), f \circ f^m(x_0)\big)\Big] \\ &\overset{(1.1)}{\leqslant} \frac{1}{1-k}\Big[k^n d\big(x_0, f(x_0)\big) + k^m d\big(x_0, f(x_0)\big)\Big] \\ &= \frac{k^n + k^m}{1-k} d\big(x_0, f(x_0)\big) \xrightarrow{n,m} 0, \end{aligned}$$

quindi, per la completezza di X, esisterà $\bar{x} \in X$ tale che

$$x_n \to \bar{x}.$$

Dimostriamo infine che $f(\bar{x}) = \bar{x}$:

ho potuto portare fuori il limite perchè sia f che d sono funzioni continue. f è continua perchè lipschitziana

$$\begin{aligned} d\big(\bar{x}, f(\bar{x})\big) &= \lim_{n \to +\infty} d\big(f^n(x_0), f \circ f^n(x_0)\big) \\ &\overset{(1.2)}{\leqslant} k^n d\big(x_0, f(x_0)\big) \to 0, \end{aligned}$$

ovvero

$$\bar{x} = f(\bar{x}).$$ □

Corollario. Se $x_0 \in X$, allora

$$f^n(x_0) \to \bar{x}.$$

Dimostrazione. Segue dalla dimostrazione del teorema. □

Osservazione. In generale è quindi utile iterare la funzione contraente per ottenere il punto fisso.

Esempio. Consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}x$, vogliamo mostrare che f è una contrazione di punto fisso nell'origine:

$$|f(x), f(y)| = \left|\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right| = \frac{1}{2}|x-y|,$$

pertanto f è per definizione una contrazione. Troviamo il suo punto fisso iterando la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{2}x,$$

da cui

$$f^2(x) = f \circ f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}x,$$

ovvero, iterando

$$f^n(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^n x \to 0,$$

quindi, per il corollario del teorema delle contrazioni, l'origine è l'unico punto fisso di f.

Osservazione. La figura 1.1 mostra una rappresentazione geometrica del procedimento adottato.

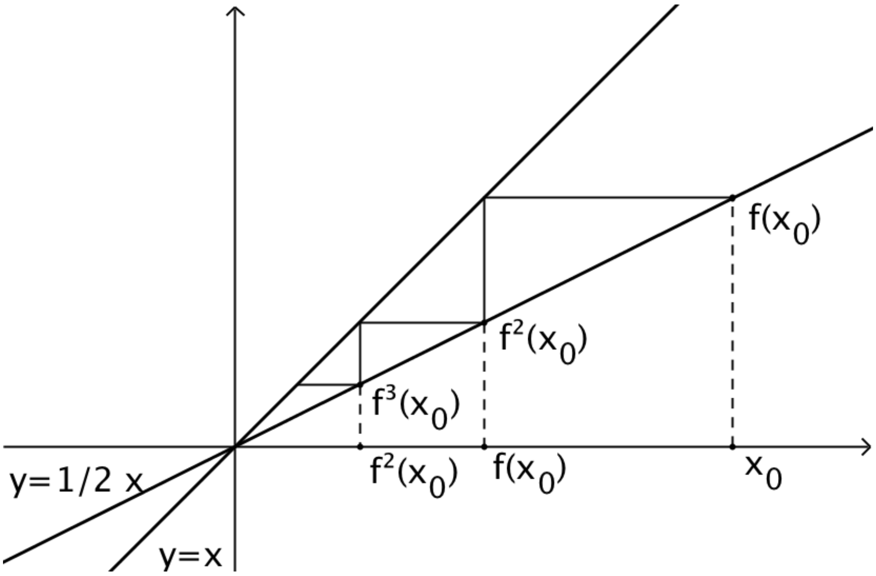

Figura 1.1: La funzione $\frac{1}{2}x$ iterata 3 volte.

Proposizione 1.2 – Distanza dal punto fisso

Sia X uno spazio metrico completo e sia $f\colon X \to X$ una contrazione. Supponiamo che $x_0 \in X$ e che $\bar{x} \in X$ sia il punto fisso di f, allora:

$$d\big(f^n(x_0), \bar{x}\big) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d\big(x_0, f(x_0)\big).$$

Dimostrazione. Sfruttando quanto visto nel teorema delle contrazioni (teorema 1.1) sappiamo che

$$d\big(f^n(x_0), f^m(x_0)\big) \leqslant \frac{k^n + k^m}{1-k} d\big(x_0, f(x_0)\big),$$

passando al limite per $m \to +\infty$ otteniamo

$$d\big(f^n(x_0), \bar{x}\big) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d\big(x_0, f(x_0)\big).$$ □

Corollario. Se $x_0 \in X$, allora

$$d(\bar{x}, x_0) \leqslant \frac{1}{1-k} d\big(x_0, f(x_0)\big).$$

Dimostrazione. Segue dalla proposizione, infatti

$$\begin{aligned} d\big(f^n(x_0), \bar{x}\big) &\leqslant \frac{k^n}{1-k} d\big(x_0, f(x_0)\big) \\ &\leqslant \frac{1}{1-k} d\big(x_0, f(x_0)\big). \end{aligned}$$

Inoltre $f^n(x_0) \to \bar{x}$, per cui

$$d(\bar{x}, x_0) \leqslant \frac{1}{1-k} d\big(x_0, f(x_0)\big).$$ □

Teorema 1.3 – Contrazioni dipendenti da un parametro

Sia Y uno spazio metrico e sia X uno spazio metrico completo. Sia $f\colon X \times Y \to X$ tale che:

- $\exists\, k \in [0,1)$ tale che $d_X\big(f(x,y), f(\tilde{x},y)\big) \leqslant k\, d_X(x,\tilde{x})$, per ogni $x, \tilde{x} \in X$;
- per ogni $x \in X$ fissato, la mappa $y \mapsto f(x,y)$ è continua.

Allora
$$\forall\, y \in Y\, \exists!\, x(y) : f\big(x(y), y\big) = x(y),$$
inoltre la mappa
$$y \mapsto x(y),$$
è continua.

Dimostrazione. Per prima cosa mostriamo che f è continua in (x,y). Sia d la distanza su $X \times Y$, definita come
$$d\big((x,y),(\tilde{x},\tilde{y})\big) = d_X(x,\tilde{x}) + d_Y(y,\tilde{y}),$$
la quale è facilmente verificabile essere una distanza. Prendiamo $(\tilde{x},\tilde{y})$ tali che
$$d_X(x,\tilde{x}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2k},$$
e
$$d_Y(y,\tilde{y}) \leqslant \delta_Y.$$
Per la continuità di $y \mapsto f(x,y)$, avremo
$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta_Y > 0 : d_Y(y,\tilde{y}) < \delta_Y \implies d_X\big(f(x,y), f(x,\tilde{y})\big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Quindi
$$\begin{aligned} d_X\big(f(x,y), f(\tilde{x},\tilde{y})\big) &\leqslant d_X\big(f(x,y), f(\tilde{x},y)\big) + d_X\big(f(\tilde{x},y), f(\tilde{x},\tilde{y})\big) \\ &\leqslant k\, d_X(x,\tilde{x}) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$
da cui la continuità di f.
Osserviamo che la mappa $f_y : x \to f(x,y)$ è, per ipotesi, una contrazione, quindi, per il teorema 1.1
$$\exists!\, x(y) : f\big(x(y), y\big) = x(y).$$
Dimostriamo la continuità in $\bar{y}$, ovvero mostriamo che
$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 : d(y,\bar{y}) < \delta \implies d\big(x(y), x(\bar{y})\big) < \varepsilon.$$
Per ogni y sia $x(y)$ il punto fisso di f_y, applicando la proposizione 1.2 a $d\big(x(y), x(\bar{y})\big)$, otteniamo:

applicando la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} d\big(x(y), x(\bar{y})\big) &\leqslant \frac{1}{1-k} d\big(f_y(x(\bar{y})), x(\bar{y})\big) \\ &\leqslant \frac{1}{1-k}\Big[d\big(f_y(x(\bar{y})), f_{\bar{y}}(x(\bar{y}))\big) + \underbrace{d\big(f_{\bar{y}}(x(\bar{y})), x(\bar{y})\big)}_{=0}\Big] \\ &= \frac{1}{1-k} d\big(f_y(x(\bar{y})), f_{\bar{y}}(x(\bar{y}))\big), \end{aligned}$$
che è minore di ε quando $d(y,\bar{y}) < \delta$ in quanto f è continua. □

Definizione 1.4 – Diffeomorfismo

Sia $D \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Una funzione $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ si definisce un *diffeomorfismo* se è di classe C^1, invertibile e la sua inversa è anch'essa di classe C^1.

Teorema 1.5 – di Inversione locale

Sia $D \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^1. Supponiamo che per un $x_0 \in D, f'(x_0)$ sia invertibile, ovvero $\det f'(x_0) \neq 0$, allora:

$$\exists\, r > 0 : f|_{B_r(x_0)}$$

è un diffeomorfismo sull'immagine.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che

$$f\colon B_r(x_0) \to f\big(B_r(x_0)\big)$$

è biiettiva e ha inversa di classe C^1.
Poniamo $y_0 = f(x_0)$, ci basta dimostrare che esiste

$$g\colon f\big(B_r(x_0)\big) \to U_{x_0},$$

U_{x_0} *indica un intorno di* x_0

tale che g sia l'inversa di f su U_{x_0} e $g(y_0 + h) = g(y_0) + a(h)$, con

$$\|a(h)\| \leqslant C\|h\|,\ \forall\ h \text{ piccolo.} \tag{$*$}$$

Se è vero ciò, $g'(y_0)$ esiste e $g'(y_0) = \big[f'(x_0)\big]^{-1}$. Mostriamo la validità di questa affermazione:

$$f\big(g(y_0+h)\big) - f\big(g(y_0)\big) = y_0 + h - y_0 = h,$$

in quanto g è l'inversa di f, ma

$$\begin{aligned} f\big(g(y_0+h)\big) - f\big(g(y_0)\big) &= f\big(g(y_0) + a(h)\big) - f\big(g(y_0)\big) \\ &= f\big(x_0 + a(h)\big) - f(x_0) \\ &= f'(x_0)a(h) + o\big(\|a(h)\|\big) \\ &\overset{(*)}{=} f'(x_0)a(h) + o\big(\|h\|\big), \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} h = f'(x_0)a(h) + o\big(\|h\|\big) &\iff f'(x_0)a(h) = h + o\big(\|h\|\big) \\ &\iff a(h) = \big[f'(x_0)\big]^{-1}h + o\big(\|h\|\big), \end{aligned}$$

poichè $\big[f'(x_0)\big]^{-1}$ *è una matrice costante*

da cui

$$g(y_0+h) = g(y_0) + \big[f'(x_0)\big]^{-1}h + o\big(\|h\|\big).$$

Inizialmente abbiamo chiesto che $\|a(h)\| = O\big(\|h\|\big)$, in realtà ci basta mostrare, affinchè valga $(*)$, che

$$\lim_{h\to 0} a(h) = 0,$$

infatti, sappiamo che

$$f\big(g(y_0+h)\big) - f\big(g(y_0)\big) = y_0 + h - y_0 = h,$$

ma

$$\begin{aligned} f\big(g(y_0+h)\big) - f\big(g(y_0)\big) &= f\big(x_0 + a(h)\big) - f(x_0) \\ &= f'(x_0)a(h) + o\big(\|a(h)\|\big), \end{aligned}$$

ovvero
$$a(h) + o\big(\|a(h)\|\big) = \big[f'(x_0)\big]^{-1} h,$$
Poniamo $k\big(a(h)\big) = o\big(\|a(h)\|\big)$, da cui
$$\lim_{h\to 0} \frac{\big\|k\big(a(h)\big)\big\|}{\|a(h)\|} = 0,$$
ovvero $\big\|k\big(a(h)\big)\big\| \leqslant \frac{1}{2}\|a(h)\|$ se $\|h\|$ è piccolo. Inoltre
$$\big\|a(h) + k\big(a(h)\big)\big\| = \Big\|\big[f'(x_0)\big]^{-1} h\Big\|,$$

$\|a\| \geqslant \big|\|a+b\| - \|b\|\big|$

ma, applicando la triangolare inversa, si ottiene
$$\begin{aligned} \big\|a(h) + k\big(a(h)\big)\big\| &\geqslant \|a(h)\| - \big\|k\big(a(h)\big)\big\| \\ &\geqslant \|a(h)\| - \frac{1}{2}\|a(h)\| \\ &= \frac{1}{2}\|a(h)\|, \end{aligned}$$
ovvero
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|a(h)\| &\leqslant \Big\|\big[f'(x_0)\big]^{-1} h\Big\| \\ &\leqslant \Big\|\big[f'(x_0)\big]^{-1}\Big\|_{op} \|h\| \\ &= C\|h\|, \end{aligned}$$
che è proprio la $(*)$.

Osservazione. La definizione di norma operatoriale per una matrice $A \in M_{m,p}$ è
$$\|A\|_{op} = \sup_{\|x\|=1} \|A\,x\|,$$
dove $\|A\,x\| \leqslant \|A\|_{op}\|x\|$.

Affinchè valga $a(h) \to 0$, ci basta mostrare che g è continua, in quanto
$$g(y_0 + h) = g(y_0) + a(h).$$
La dimostrazione del teorema si riduce quindi alla ricerca di un'inversa continua g. Definiamo
$$H \colon D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto x - f(x) + y,$$
i punti fissi di H identificheranno le controimmagini di y tramite f, infatti
$$H(x, y) = x \iff x - f(x) + y = x,$$
ovvero
$$y = f(x).$$
Cercheremo quindi di applicare il teorema delle contrazioni dipendenti da un parametro (1.3) all'applicazione
$$H \colon \overline{B_\delta(x_0)} \times \overline{B_{\frac{\delta}{2}}(y_0)} \to \overline{B_\delta(x_0)}.$$
Dimostrando che H è una contrazione in x uniforme in y, otterremo che esiste un unico $x \in \overline{B_\delta(x_0)}$ tale che $y = f(x)$. Dato $y \in \overline{B_{\frac{\delta}{2}}(y_0)}$ possiamo dunque trovare un $x \in \overline{B_\delta(x_0)}$ che risolve $f(x) = y$. Se chiamiamo g l'applicazione che associa ad y tale x, avremo
$$f\big(g(y)\big) = y,$$
e inoltre g sarà continua per il teorema.

- Mostriamo che H ha effettivamente $\overline{B_\delta(x_0)}$ come codominio:

$$\begin{aligned}\|H(x,y)-x_0\| &= \|x-f(x)+y-x_0\| \\ &= \big\|(x-x_0)-\big[f(x)-f(x_0)\big]+(y-y_0)\big\| \\ &\leqslant \big\|(x-x_0)-\big[f(x)-f(x_0)\big]\big\|+\|y-y_0\|,\end{aligned}$$

$f(x_0)=y_0$

posto $\alpha\colon x\mapsto x-f(x)$, avremo

$$\begin{aligned}(x-x_0)-\big[f(x)-f(x_0)\big] &\mapsto \alpha(x)-\alpha(x_0) \\ &= \alpha'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0) \\ &= o(x-x_0),\end{aligned}$$

applicando Taylor

in quanto $\alpha'(x_0)=\mathrm{Id}-\mathrm{Id}$, per cui

vedi l'osservazione successiva per $f'(x_0)=\mathrm{Id}$

$$\big\|(x-x_0)-\big[f(x)-f(x_0)\big]\big\|\leqslant\|o(x-x_0)\|\leqslant\frac{1}{2}\|x-x_0\|\leqslant\frac{1}{2}\delta.$$

Infine $y\in\overline{B_{\frac{\delta}{2}}(y_0)}$ implica

$$\|y-y_0\|\leqslant\frac{1}{2}\delta,$$

da cui

$$\|H(x,y)-x_0\|\leqslant\delta.$$

- La continuità di $y\mapsto H(x,y)$ è immediata dalla continuità di f.
- Mostriamo che H è una contrazione in x:

$$\begin{aligned}\|H(x,y)-H(x',y)\| &= \big\|\big[x-f(x)+y\big]-\big[x'-f(x')+y\big]\big\| \\ &= \big\|\big[x-f(x)\big]-\big[x'-f(x')\big]\big\| \\ &\leqslant \sup_{z\in\overline{B_\delta(x_0)}}\|\mathrm{Id}-f'(z)\|_{op}\|x-x'\|.\end{aligned}$$

Ora $\|\mathrm{Id}-f'(x_0)\|_{op}=0$, per cui $\|\mathrm{Id}-f'(z)\|_{op}$ è piccolo se $z\in\overline{B_\delta(x_0)}$ con δ opportuno. Quindi $\|\mathrm{Id}-f'(z)\|\leqslant\frac{1}{2}$, da cui

$$\|H(x,y)-H(x',y)\|\leqslant\frac{1}{2}\|x-x'\|.$$

Osservazione. Possiamo sempre supporre che $f'(x_0)=\mathrm{Id}$. Infatti, se non lo fosse, possiamo definire

$$\tilde{f}(x)=\big[f'(x_0)\big]^{-1}f(x),$$

dove $\tilde{f}'(x_0)=\mathrm{Id}$. Una volta dimostrata l'invertibilità di $\tilde{f}$, quella di f segue immediatamente da $f(x)=\tilde{f}(x)f'(x_0)$.

Abbiamo dunque dimostrato che esiste una g differenziabile tale che, se $y\in B_{\frac{\delta}{2}}(y_0)$, allora esiste unica $g(y)\in B_\delta(x_0):\big(f\circ g\big)(y)=y$. Per concludere il teorema devo dimostrare che

$$g\big(B_{\frac{\delta}{2}}(y_0)\big)\supseteq B_r(x_0),$$

per qualche $r>0$. Siccome f è continua, se r è piccolo, avremo

$$f\big(B_r(x_0)\big)\subseteq B_{\frac{\delta}{2}}(y_0),$$

in tal caso g è definita su $f\big(B_r(x_0)\big)$ e $g\big(f(x)\big)=x$ per $x\in B_r(x_0)$, ovvero

$$B_r(x_0)\subseteq g\big(B_{\frac{\delta}{2}}(y_0)\big).$$

□

Corollario. Se

$$g\colon f\big(B_r(x_0)\big) \to B_r(x_0)$$

è l'inversa di f e $f(x_0) = y_0$, allora

$$g'(y_0) = \big[f'(x_0)\big]^{-1}.$$

Osservazione. Il teorema è locale, ciò significa che l'inversa ha senso ed esiste solo tra intorni.

Osservazione. Se f non è di classe C^1 il teorema è falso, mostriamolo con il seguente controesempio: consideriamo la bisettrice del piano, $y = x$, e la parabola tangente ad essa nell'origine, $y = \frac{1}{2}x^2 + x$. Consideriamo quindi la funzione f della figura 1.2, tale funzione è differenziabile nell'origine in quanto è stretta da funzioni con derivata 1. Tale derivata non risulta però continua ed f non è iniettiva in un intorno dell'origine.

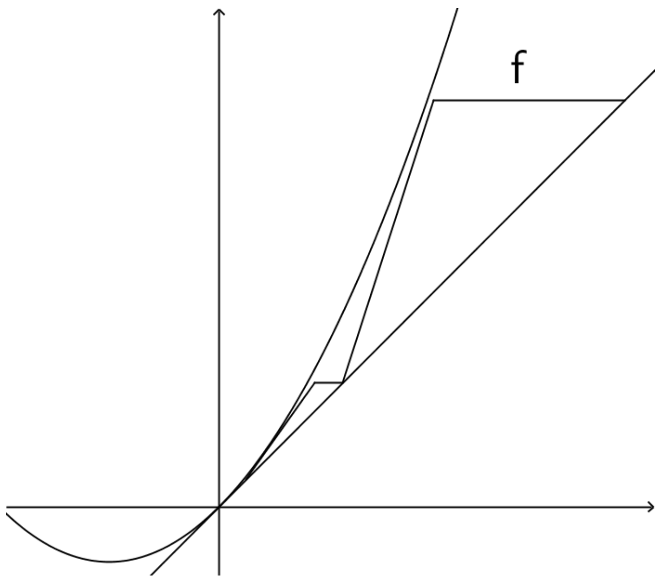

Figura 1.2: La funzione f è stretta fra la parabola e la bisettrice.

Esempio. Consideriamo la funzione delle coordinate polari

$$f\colon S^1 \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, (\vartheta, \rho) \mapsto (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta),$$

dove $S^1 = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$. Vogliamo mostrare che f ammette inversa di classe C^1.
Per applicare il teorema dobbiamo verificare che f sia invertibile di classe C^1 e che f' sia localmente invertibile.

- Calcoliamo la jacobiana associata ad f. Abbiamo

$$f\colon \begin{pmatrix}\vartheta\\ \rho\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x(\vartheta,\rho)\\ y(\vartheta,\rho)\end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} x(\vartheta,\rho) = \rho\cos\vartheta \\ y(\vartheta,\rho) = \rho\sin\vartheta \end{cases},$$

da cui

$$\begin{aligned} f'\begin{pmatrix}\vartheta\\ \rho\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\partial_\vartheta x(\vartheta,\rho) & \partial_\rho x(\vartheta,\rho)\\ \partial_\vartheta y(\vartheta,\rho) & \partial_\rho y(\vartheta,\rho)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-\rho\sin\vartheta & \cos\vartheta\\ \rho\cos\vartheta & \sin\vartheta\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le derivate parziali di f sono visibilmente continue, per cui f è C^1.

- Mostriamo che f è localmente invertibile: supponiamo che $f(\vartheta,\rho) = f(\vartheta',\rho')$, allora

$$\begin{aligned} \|f(\vartheta,\rho)\| = \|f(\vartheta',\rho')\| &\iff \|(\rho\cos\vartheta,\rho\sin\vartheta)\| = \|(\rho'\cos\vartheta',\rho'\sin\vartheta')\|\\ &\iff \sqrt{\rho^2\cos^2\vartheta+\rho^2\sin^2\vartheta} = \sqrt{\rho'^2\cos^2\vartheta'+\rho'^2\sin^2\vartheta'}\\ &\iff \rho=\rho', \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} (\rho\cos\vartheta,\rho\sin\vartheta) = (\rho\cos\vartheta',\rho\sin\vartheta') &\iff (\cos\vartheta,\sin\vartheta) = (\cos\vartheta',\sin\vartheta')\\ &\iff \vartheta-\vartheta'\in 2\pi\mathbb{Z}\\ &\iff \vartheta=\vartheta', \end{aligned}$$

ovvero f è iniettiva.
La suriettività segue banalmente da

$$\left(\arctan\frac{y}{x}, \sqrt{x^2+y^2}\right) \mapsto (x,y),\ \forall\ x,y\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

- Infine

$$\det f'\begin{pmatrix}\rho\\ \vartheta\end{pmatrix} = -\rho \neq 0,$$

ovvero f' è localmente invertibile comunque presi (ρ,ϑ).

Quindi f è localmente invertibile con inversa di classe C^1.

Esempio. Un esempio analogo riguarda la funzione delle coordinate cilindriche

$$f\colon (0,+\infty)\times S^1\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\},\ \begin{pmatrix}\rho\\ \vartheta\\ \lambda\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\rho\cos\vartheta\\ \rho\sin\vartheta\\ \lambda\end{pmatrix}.$$

Come nell'esercizio precedente si mostra facilmente che f è biiettiva di classe C^1, per verificare che l'inversa è C^1, è sufficiente dimostrare che $\det f'\neq 0$. Calcoliamo quindi la jacobiana associata ad f:

$$f'\begin{pmatrix}\rho\\ \vartheta\\ \lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta & 0\\ \sin\vartheta & \rho\cos\vartheta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

da cui

$$\det f'\begin{pmatrix}\rho\\ \vartheta\\ \lambda\end{pmatrix} = \rho\neq 0.$$

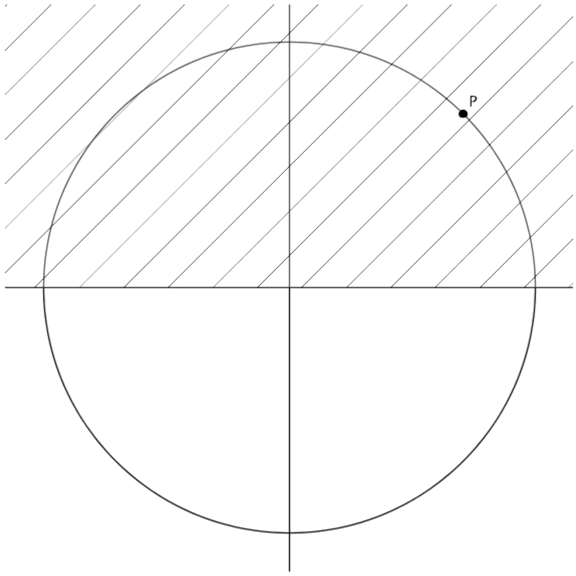

Figura 1.3: La circonferenza unitaria ristretta al semipiano superiore.

1.2 TEOREMA DELLA FUNZIONE IMPLICITA

Lo scopo di questo paragrafo sarà stabilire se, presa una funzione

$$f(x, y) = 0,$$

è possibile esplicitare la variabile y in funzione della variabile x. Cercheremo inoltre di capire, nei casi in cui sarà possibile, quali sono le proprietà (continuità, differenziabilità) di $y(x)$.

Cominciamo con l'analizzare alcuni esempi, nei quali tenteremo di capire sotto quali ipotesi è possibile esplicitare una variabile.

Esempio. Consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$ e la curva

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x, y) = 0 \right\},$$

rappresentata in figura 1.3. Naturalmente non è vero che, fissato x, esiste un'unica $y(x)$ che soddisfa l'equazione. Affinchè risulti vero, è necessario porsi in un intorno dove l'inversa sia locale. In tal caso troviamo un'unica $y(x)$ che soddisfa l'equazione localmente.
Ad esempio, se consideriamo il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, nell'intorno del semipiano superiore $U = \{ (x, y) \mid y > 0 \}$, avremo

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Nello stesso modo potremmo esplicitare la x in funzione di y nell'intorno $V = \{ (x, y) \mid x > 0 \}$, ottenendo

$$x(y) = \sqrt{1 - y^2}.$$

Osserviamo che se invece considerassimo il punto $(0, 1)$, non potremmo trovare un'unica $x(y)$.

Esempio. Consideriamo un esempio analogo in 3 dimensioni. Presa $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$, consideriamo la curva

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; f(x, y, z) = 0 \right\},$$

mostrata in figura 1.4. Se in questo caso consideriamo il punto $(0, 0, 1)$ nell'intorno

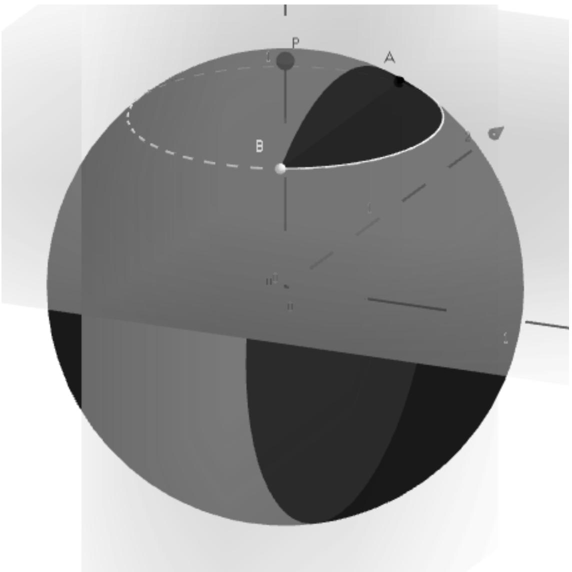

Figura 1.4: Nell'intorno di $(0,0,1)$, non è possibile esplicitare x o y.

$U = \{\,(x,y,z) \mid z > 0\,\}$, possiamo esplicitare la z in funzione delle altre due variabili, ottendendo

$$z(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Questo procedimento non potrà mai essere applicato alle variabili x ed y, in quanto ogni intorno del punto $(0,0,1)$ incontrerà necessariamente due punti della curva.

Esempio. Consideriamo la funzione

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ x^2 + y^2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

associata alla curva

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : f(x,y,z) = 0 \right\}.$$

Poniamoci in un intorno di $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, ci aspettiamo di esplicitare due variabili in funzione della terza.
Ad esempio, nell'intorno $U = \{\,(x,y,z) \mid z > 0, y > 0\,\}$ otteniamo, osservando che z può assumere soltanto il valore $\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2} - x^2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Analogamente, nell'intorno $V = \{\,(x,y,z) \mid z > 0, x > 0\,\}$, otteniamo

$$\begin{pmatrix} x(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2} - y^2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Ovviamente non potremo esplicitare in funzione di z, in quanto può assumere un unico valore, che va sempre ad identificare una circonferenza.

Osservazione. In generale vorremmo che, preso $F\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, si abbia

$$F\big(x, y(x)\big) = z_0,\ \forall\ x \in U_{x_0}.$$

Ciò che faremo è applicare il teorema della funzione inversa, abbiamo quindi necessità di definire un'applicazione fra spazi uguali che ci aiuti nel nostro scopo. Consideriamo quindi

$$G\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto \big(x, F(x, y)\big).$$

Supponiamo quindi che a G si possa applicare il teorema della funzione inversa, avremo quindi che

$$G\colon U_{(x_0, y_0)} \to V_{\left(x_0, F(x_0, y_0)\right)},$$

è invertibile, ovvero esiste

$$G^{-1}\colon V_{\left(x_0, F(x_0, y_0)\right)} \to U_{(x_0, y_0)}, (x, y) \mapsto \big(a(x, y), b(x, y)\big).$$

Ora $\big(G \circ G^{-1}\big)(x, y) = (x, y)$, da cui

$$G\big(a(x, y), b(x, y)\big) = (x, y),$$

ma

$$G\big(a(x, y), b(x, y)\big) = \Big(a(x, y), F\big(a(x, y), b(x, y)\big)\Big).$$

In particolare $a(x, y) = x$, da cui

$$\Big(x, F\big(x, b(x, y)\big)\Big) = (x, y),$$

ovvero

$$F\big(x, b(x, y)\big) = y.$$

Quindi mi basta porre $y(x) = b(x, z_0)$ per ottenere

$$F\big(x, y(x)\big) = F\big(x, b(x, z_0)\big) = z_0,$$

per ogni x in un intorno di X.

Siamo quindi pronti ad enunciare e dimostrare rigorosamente il teorema della funzione implicita.

Teorema 1.6 – della funzione implicita

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^m, B \subseteq \mathbb{R}^n$ due aperti. Sia $f\colon A \times B \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1. Si supponga che $f(x_0, y_0) = z_0$ e che $\partial_y f(x_0, y_0)$ sia invertibile.
Allora esiste un intorno U di x_0, un intorno V di y_0 e una funzione $a\colon U \to V$ tale che

- Per ogni $x \in U$, l'unica soluzione $y \in V$ di $f(x, y) = z_0$ è $a(x)$;
- a è di classe C^1 e vale

$$a'(x_0) = -\big[\partial_y f|_{(x_0, y_0)}\big]^{-1} \partial_x f|_{(x_0, y_0)}.$$

Dimostrazione. Consideriamo la seguente funzione

$$F\colon A \times B \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Tale funzione è di classe C^1 in quanto f è C^1 per ipotesi e y è banalmente C^1. Inoltre vale

$$F\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad F'\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ \partial_x f(x_0, y_0) & \partial_y f(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Mostriamo che $F'(x_0, y_0)$ è invertibile. Fissato (l, m) vogliamo quindi trovare (h, k) tale che

$$F'\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix},$$

ovvero

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ \partial_x f(x_0, y_0) & \partial_y f(x_0, y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} h \\ \partial_x f(x_0, y_0)h + \partial_y f(x_0, y_0)k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} h = l \\ \partial_x f(x_0, y_0)h + \partial_y f(x_0, y_0)k = m \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} h = l \\ \partial_y f(x_0, y_0)k = m - \partial_x f(x_0, y_0)l \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} h = l \\ k = \left[\partial_y f(x_0, y_0)\right]^{-1}\left(m - \partial_x f(x_0, y_0)l\right) \end{cases}
\end{aligned}$$

il passaggio è lecito in quanto $\partial_y f(x_0, y_0)$ è invertibile per ipotesi

Ci troviamo quindi nelle ipotesi del teorema della funzione inversa (1.5). Per cui esistono degli intorni $U_{(x_0,y_0)}$ e $V_{(x_0,z_0)}$ in cui

$$F\colon U_{(x_0,y_0)} \to V_{(x_0,z_0)},$$

è invertibile tramite una funzione G di classe C^1.
La funzione G sarà del tipo

$$G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x, y) \\ h(x, y) \end{pmatrix}.$$

Per cui avremo

$$(F \circ G)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad (F \circ G)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} g(x, y) \\ h(x, y) \end{pmatrix},$$

da cui

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} g(x, y) \\ h(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f\begin{pmatrix} g(x, y) \\ h(x, y) \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Da ciò segue, in particolare, che $g(x, y) = x$, da cui

$$\begin{cases} x = x \\ y = f\begin{pmatrix} x \\ h(x, y) \end{pmatrix} \end{cases}$$

A questo punto, è sufficiente porre

$$a(x) = h(x, z_0),$$

per ottenere che

$$f\bigl(x, a(x)\bigr) = f\bigl(x, h(x, z_0)\bigr) = z_0.$$

Dobbiamo ancora verificare che a sia definito in un intorno di x_0, ma ciò segue dal fatto che $a(x) = h(x, z_0)$ è definita come una componente di G. Infatti

$$G\colon V_{(x_0,z_0)} \to U_{(x_0,y_0)},$$

dove, per la topologia prodotto

$$V_{(x_0,z_0)} \supseteq B_r(x_0) \times B_r(z_0),$$

quindi, in particolare
$$x \in B_r(x_0),$$
ovvero a è definito in un intorno di x_0.
Inoltre a è di classe C^1 in quanto componente di G che è a sua volta C^1.
Resta da trovare la forma esplicita della derivata. Definiamo
$$l\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, x \mapsto \big(x, a(x)\big).$$
Ora, se $x \in B_r(x_0)$, avremo
$$f\big(l(x)\big) = f\big(x, a(x)\big) \equiv z_0,$$
da cui
$$(f \circ l)'(x) = 0,\ \forall\ x \in B_r(x_0).$$
Abbiamo
$$f \circ l\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$
per cui $f' \in M_{n\times(m+n)}$ e $l' \in M_{(m+n)\times m}$. Inoltre
$$f'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad l'(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} \\ a'(x) \end{pmatrix}$$
Da cui

$(x_0, a(x_0)) = (x_0, y_0)$

$$\begin{aligned} 0 = (f \circ l)'(x_0) &= f'\big(l(x_0)\big)l'(x_0) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y) \end{pmatrix}|_{(x_0,a(x_0))} \begin{pmatrix} \mathrm{Id} \\ a'(x_0) \end{pmatrix} \\ &= \partial_x f(x_0,y_0) + \partial_y f(x_0,y_0) a'(x_0), \end{aligned}$$
ovvero
$$a'(x_0) = -\big[\partial_y f(x_0,y_0)\big]^{-1} \partial_x f(x_0,y_0).$$ □

Osservazione. In generale, preso $y \in B_r(y_0)$, vale
$$a'(y) = -\big[\partial_x f(a(y),y)\big]^{-1} \partial_y f(a(y),y).$$

Esempio. Consideriamo nuovamente la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 + y^2$, associata alla curva
$$\{\, (x,y) \mid f(x,y) = 1 \,\}.$$
Questa volta, senza esplicitare realmente la y, vogliamo trovare quanto vale la derivata della funzione, esplicitata in y rispetto ad x, nel punto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Verifichiamo per prima cosa che la derivata su y non sia nulla:
$$\partial_y f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \neq 0.$$
Per il teorema, dal momento che f è chiaramente C^1, avremo
$$\begin{aligned} y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= -\left[\partial_y f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]^{-1} \partial_x f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Esempio. Consideriamo la funzione

$$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2 \\ x^2+y^2 \end{pmatrix},$$

associata alla curva

$$\left\{ (x,y,z) \;\middle|\; F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Verifichiamo se è possibile applicare il teorema al punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, esplicitando y e z rispetto ad x.

$$\begin{aligned} \partial_{y,z}F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{pmatrix}_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

per cui $\partial_{y,z}F$ è invertibile, posso quindi applicare il teorema. Avremo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y'\left(\frac{1}{2}\right) \\ z'\left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} &= -\left[\partial_{y,z}F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]^{-1} \partial_x F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}{}^t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{pmatrix} y'\left(\frac{1}{2}\right) \\ z'\left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.3 MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

In questo paragrafo studieremo un metodo pratico per la ricerca di massimi e minimi vincolati. Per farlo introdurremo i concetti di *curve di livello* e di *moltiplicatori di Lagrange*. Come prima cosa mostriamo un esempio tipico, risolubile anche a mano, che ci mostra il genere di problemi che studieremo.

Esempio. Supponiamo di voler massimizzare $x+y$ sotto il vincolo $x^2+y^2=1$. In questo caso la funzione da massimizzare rappresenta tutte le rette del piano di pendenza -1, mentre il vincolo è costituito dalla circonferenza unitaria. Come è evidente dalla figura 1.5 il massimo è raggiunto nel punto $P = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ con $f(P) = \sqrt{2}$. Osserviamo che le linee di livello di $x+y$ raggiungono il massimo, rispetto al vincolo, nel punto di tangenza alla circonferenza, osserveremo questo comportamento anche in seguito.

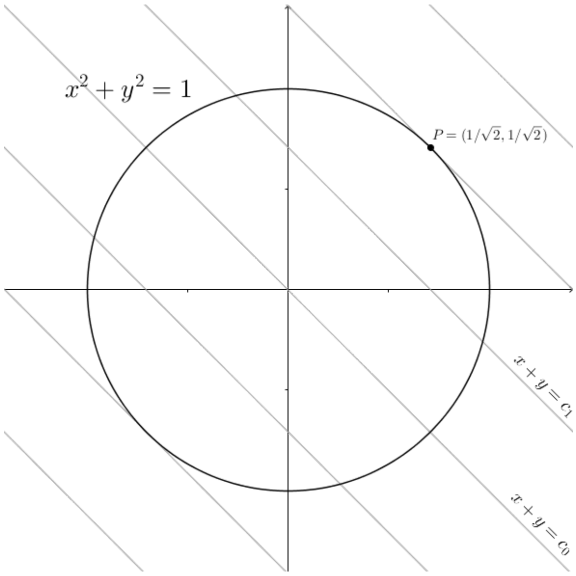

Figura 1.5: La funzione $x + y$ e il suo vincolo sul piano $\mathbb{R}^2$.

Notazione. Da questo momento, presa una funzione $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, utilizzaremo il simbolo $f'(x)$ per fare riferimeno al vettore riga delle dereivate parziali di f, mentre useremo il simbolo di *nabla* $\nabla f(x)$, per far riferimento al vettore colonna delle derivate parziali.

Osservazione. Questo uso arbitrario di vettori riga o colonna può essere giustificato rigorosamente tramite il ben noto isomorfismo $\mathbb{R}^n \simeq \left(\mathbb{R}^n\right)^*$. Infatti, se consideriamo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ avremo che

$$f'(x) \in M_{1,n}(\mathbb{R}),$$

la quale, in vista della corrispondenza biunivoca fra matrici $n \times m$ e applicazioni lineari da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$, può essere associata ad un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$, ovvero ad un elemento del duale di $\mathbb{R}^n$. In virtù del suddetto isomorfismo, esisterà

$$\varphi : \left(\mathbb{R}^n\right)^* \to \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ed è tale che vale

$$(\varphi(x), y) = {}^t x\, y,$$

per cui

$$\nabla f(x) = {}^t\big(f'(x)\big) = \varphi\big(f'(x)\big).$$

Definizione 1.7 – Linee di livello

Consideriamo una funzione $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $c_n \in \mathbb{R}$. Si definisce *curva di livello* l'insieme costituito dai punti di A che soddisfano l'equazione $f(\bar{x}) = c_n$, ovvero

$$L(f, c_n) = \{\, \bar{x} \in A \mid f(\bar{x}) = c_n \,\}.$$

Osservazione. Nella figura 1.5 si possono osservare le linee di livello della funzione

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y.$$

Teorema 1.8 – Moltiplicatori di Lagrange

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Sia $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^1 con

$$g'(x) \neq 0, \ \forall\, x : g(x) = 0,$$

allora, se x_0 è un punto di massimo o di minimo per $f|_{\{x:g(x)=0\}}$ si ha che

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{R} : f'(x_0) = \lambda g'(x_0).$$

Dimostrazione. Supponiamo che x_0 sia il massimo vincolato. Applicando una traslazione posso supporre che $x_0 = \bar{0}$. infine, applicando una rotazione O, possiamo supporre

avremo $\tilde{f}(x) = f(O\,x), \tilde{g}(x) = g(O\,x)$

$$\nabla g(\bar{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha \neq 0.$$

Osserviamo che è possibile applicare il teorema della funzione implicita (teorema 1.6 alla funzione

$$g\colon \big((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n\big) \to g(x_1, \dots, x_n),$$

infatti $g \in C^1$ e $\partial_{x_n} g(0) = \alpha \neq 0$. Posso quindi esplicitare x_n in funzione di $(x_1, \dots, x_{n-1})$, ovvero

$$x_n = h(x_1, \dots, x_{n-1}), \text{ per } (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B_r(\bar{0}), r \text{ piccolo.}$$

Di conseguenza, se $g \in C^1, g'(x_0) \neq 0$ e $g(x_0) = 0$ possiamo affermare che

$$G = \{\, x \in \Omega \mid g(x) = 0 \,\},$$

è un grafico in un intorno di x_0.
Procediamo con il dimostrare che $\partial_{x_1} h(\bar{0}) = \partial_{x_2} h(\bar{0}) = \dots = \partial_{x_{n-1}} h(\bar{0})$. Per il teorema della funzione implicita avremo

$$\partial_{x_i} h(\bar{0}) = -\frac{1}{\partial_{x_n} g(\bar{0})} \partial_{x_i} g(\bar{0}) = -\frac{1}{\alpha} 0 = 0.$$

Poniamo

$$l\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \big(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})\big),$$

avremo quindi

$$\big(f \circ l\big)(x_1, \dots, x_{n-1}) = f\big(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})\big).$$

Sapendo che il massimo vincolato è in $\bar{0}$, avremo

$$\begin{cases} \partial_{x_1} \big(f \circ l\big)(\bar{0}) = 0 \\ \dots \\ \partial_{x_{n-1}} \big(f \circ l\big)(\bar{0}) = 0 \end{cases}$$

calcoliamo, mediante la regola della catena, $\partial_{x_1} \big(f \circ l\big)(\bar{0})$ per poi estendere il risultato alle altre derivate:

$$\partial_{x_1} \big(f \circ l\big)(\bar{0}) = f'\big(l(\bar{0})\big) \partial_{x_1} l(\bar{0}),$$

in particolare

$$\partial_{x_1} l(\bar{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \partial_{x_1} h(\bar{0}) \end{pmatrix}$$

mentre
$$f'(\bar{0}) = \big(\partial_{x_1} f(\bar{0}), \dots, \partial_{x_n} f(\bar{0})\big),$$
da cui
$$\begin{aligned}
\partial_{x_1}\big(f \circ l\big)(\bar{0}) &= f'\big(l(\bar{0})\big)\partial_{x_1} l(\bar{0}) \\
&= \Big(\partial_{x_1} f\big(l(\bar{0})\big), \dots, \partial_{x_n} f\big(l(\bar{0})\big)\Big) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \partial_{x_1} h(\bar{0}) \end{pmatrix} \\
&= \partial_{x_1} f\big(l(\bar{0})\big) + \partial_{x_n} f\big(l(\bar{0})\big)\partial_{x_1} h(\bar{0}) \\
&= \partial_{x_1} f(\bar{0}) + \partial_{x_n} f(\bar{0})\partial_{x_1} h(\bar{0}).
\end{aligned}$$

per definizione $h(\bar{0}) = \bar{0}$, *quindi* $l(\bar{0}) = \bar{0}$

Quindi, dal momento che $\partial_{x_i} h(\bar{0}) = 0$, avremo
$$0 = \partial_{x_1}\big(f \circ l\big)(\bar{0}) = \partial_{x_1} f(\bar{0}),$$
estendendo il risultato a tutte le derivate parziali
$$\begin{cases} \partial_{x_1} f(\bar{0}) = 0 \\ \partial_{x_2} f(\bar{0}) = 0 \\ \dots \\ \partial_{x_{n-1}} f(\bar{0}) = 0 \end{cases}$$
inoltre, per la rotazione iniziale, avremo
$$\begin{cases} \partial_{x_1} g(\bar{0}) = 0 \\ \partial_{x_2} g(\bar{0}) = 0 \\ \dots \\ \partial_{x_{n-1}} g(\bar{0}) = 0 \end{cases}$$
quindi $\nabla f(\bar{0})$ e $\nabla g(\bar{0})$ sono paralleli, in quanto hanno tutte le componenti uguali eccetto una, ovvero
$$\nabla f(\bar{0}) = \lambda \nabla g(\bar{0}).$$
□

Esempio. Consideriamo la seguente funzione
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy,$$
vincolato al seguente grafico
$$G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; g(x, y) = 0 \right\}, \text{ con } g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 - 1.$$
Troviamo i massimi e i minimi di $f|_g$.
Per prima cosa osserviamo che f è una funzione continua, mentre G è ovviamente limitato. Inoltre G risulta essere chiuso, in quanto l'insieme $\{0\} \subset \mathbb{R}$ è chiuso e la mappa
$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$$
è continua, pertanto il grafico $G = g^{-1}\big(\{0\}\big)$ è chiuso. Quindi G è compatto, per il teorema di Weierstrass sappiamo che f ammetterà massimi e minimi su G.
Osserviamo che
$$g'(x, y) = (2x, 2y) = \bar{0} \iff (x, y) = \bar{0},$$

ma $\bar{0} \notin G$, inoltre g è di classe C^1, quindi le ipotesi del teorema sono rispettate. I massimi e minimi di $f|_g$ sono quindi individuati da

$$\begin{cases} x^2 + y^1 = 1 \\ \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = \lambda y \\ y = \lambda x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = \lambda^2 x \end{cases}$$

posso dividere per 2 assorbendo il fattore con λ

si presentano quindi tre casi:

- Se $\lambda = 0$, avremo $(x, y) = (0, 0) \notin G$, che quindi non è un caso accettabile.
- Se $\lambda = 1$, avremo
$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = A_\pm.$$
- Infine se $\lambda = -1$, avremo
$$\begin{cases} x = -y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = B_\pm.$$

Osserviamo che sia $A_\pm$ che $B_\pm$ appartengono a G e costituiscono pertanto dei punti di massimo o di minimo per f, in particolare

$$f(A_\pm) = \frac{1}{2}$$
$$f(B_\pm) = -\frac{1}{2}$$

ovvero $A_\pm$ sono punti di massimo e $B_\pm$ sono punti di minimo.

Esempio. Consideriamo $A \in M_n(\mathbb{R})$ e la seguente applicazione

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}(x, A\,x) = \frac{1}{2}{}^t x(A\,x),$$

vincolato al grafico

$$G = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0 \,\}, \text{ con } g(x) = \frac{1}{2}\big(\|x\|^2 - 1\big).$$

Cerchiamo di applicare i moltiplicatori di Lagrange:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \implies g'(x) = (x_1, \dots, x_n),$$

da cui

$$g'(x) = 0 \iff (x_1, \dots, x_n) = \bar{0},$$

ma $\bar{0} \notin G$, quindi il teorema è applicabile. Calcoliamo la derivata di f tramite la definizione di differenziale

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= \frac{1}{2}\big(x+h, A(x+h)\big) - \frac{1}{2}(x, A\,x) \\ &= \frac{1}{2}\big(x, A(x+h)\big) + \frac{1}{2}\big(h, A(x+h)\big) - \frac{1}{2}(x, A\,x) \\ &= \cancel{\frac{1}{2}(x, A\,x)} + \frac{1}{2}(x, A\,h) + \frac{1}{2}(h, A\,x) + \frac{1}{2}(h, A\,h) - \cancel{\frac{1}{2}(x, A\,x)} \\ &= (A\,x, h) + \frac{1}{2}(h, A\,h) \\ &= (A\,x, h) + o\big(\|h\|\big), \end{aligned}$$

per simmetria $(x, A\,h) = (h, A\,x)$

dove l'ultima uguaglianza segue per Cauchy-Schwarz, infatti

$$(h, A\,h) \leqslant \|h\|\|A\,h\| \leqslant \|A\|_{op}\|h\|^2 = o\big(\|h\|\big).$$

Quindi $f'(x) = A\,x$, da cui, applicando il teorema

$$\begin{cases} \|x\|^2 - 1 = 0 \\ f'(x) = \lambda g'(x) \end{cases} \iff \begin{cases} \|x\|^2 = 1 \\ A\,x = \lambda x \end{cases}$$

ovvero se x è il massimo, sarà un autovettore di norma 1 associato all'autovalore λ. Quindi, se siamo in grado di simostrare che esiste un punto di massimo, abbiamo la garanzia che esista almeno una coppia di autovettore-autovalore (x, λ).

in realtà già sappiamo che è vero in quanto ogni matrice simmetrica è diagonalizzabile

Ora, f è certamente continua, inoltre G è banalmente limitato. La chiusura di G si dimostra in maniera analoga all'esempio precedente, infatti l'insieme $\{0\} \subset \mathbb{R}$ è chiuso e la mappa

$$g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}(\|x\|^2 - 1)$$

è continua, per cui $G = f^{-1}(\{0\})$ è chiuso.
Per il teorema di Weierstrass f ammette massimi e minimi su G. Supponiamo quindi che tale massimo sia individuato dall'autovettore x, segue

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(x, A\,x) = \frac{1}{2}\lambda(x, x) \\ &= \frac{1}{2}\lambda\|x\|^2 = \frac{1}{2}\lambda, \end{aligned}$$

ovvero il massimo è individuato dall'autovettore associato all'autovalore più grande.

Osservazione. Supponendo che x_0 sia il massimo è possibile individuare tutti gli altri autovettori semplicemente riproducendo lo stesso procedimento su $\mathcal{L}(x_0)^{\perp}$.

Esempio. Si mostrino i massimi e i minimi di

$$f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n,$$

vincolato al simplesso n-dimensionale (mostrato nella versione a 3-dimensioni in figura 1.6)

$$T = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_i \geqslant 0, \forall\, i \text{ e } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}.$$

Sicuramente avremo massimo e minimo poichè T è compatto e f è continua. Inoltre è evidente che $\min f|_T = 0$, per il massimo utilizzeremo i moltiplicatori di Lagrange:

$$g(x) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \implies g'(x) = (1, 1, \ldots, 1) \neq \bar{0},$$

inoltre

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \\ x_1 x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \\ \ldots \\ x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \end{pmatrix}$$

il massimo deve quindi soddisfare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ \begin{pmatrix} x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \\ x_1 x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \\ \ldots \\ x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \ldots \\ \lambda \end{pmatrix} \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ \frac{x_2}{x_1} = 1 \\ \frac{x_3}{x_2} = 1 \\ \ldots \\ \frac{x_n}{x_{n-1}} = 1 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ x_1 = x_2 = \ldots = x_n \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \ldots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

per cui il massimo vale $f(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}) = \frac{1}{n^n}$.

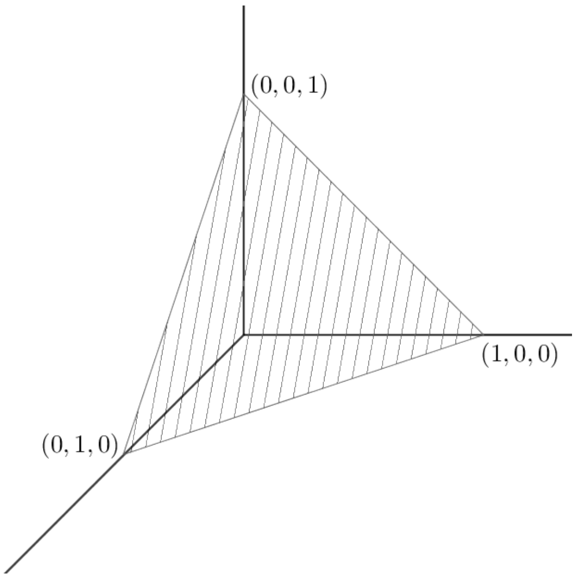

Figura 1.6: Il simplesso in 3 dimensioni.

Osservazione. Da questo esempio si deduce che

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

ovvero che la media geometrica è sempre minore di quella aritmetica.

1.4 APPENDICE

Teorema 1.9 – Generalizzazioe moltiplicatori di Lagrange

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Siano $g_1, \dots, g_k \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, con $k \leqslant n$. Si supponga che, preso $x \in G = \{x \in \Omega : g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$ la mappa

$$\Gamma\colon \Omega \to \mathbb{R}^k, \Gamma(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \dots \\ g_k(x) \end{pmatrix}$$

abbia $\Gamma'(x)$ di rango massimo. Allora, se x_0 è un punto di massimo o di minimo per $f|_G$ si ha che

$$\begin{cases} f'(x_0) = \lambda_1 g_1'(x_0) + \lambda_2 g_2'(x_0) + \dots + \lambda_k g_k'(x_0) \\ g_1(x_0) = 0 \\ \dots \\ g_k(x_0) = 0. \end{cases}$$

Dimostrazione. Provare per esercizio.
Suggerimento: utilizzando Lagrange e la funzione implicita cerchiamo di esplicitare k variabili in ogni punto di G (tramite i k vincoli) in funzione delle altre $n - k$. □

Osservazione. Nel sistema ci sono $n + k$ incognite, di cui n di $x_0 = (x_{0_1}, \dots, x_{0_n})$ e k dei moltiplicatori di Lagrange. D'altronde abbiamo $n + k$ equazioni, di cui k delle equazioni delle g_i ed n date dai gradienti.

Proposizione 1.10 – Gradiente di una funzione ortogonale alla superficie

Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, consideriamo la sua superficie associata

$$G = \{\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\bar{x}) = 0 \,\}.$$

Allora $\nabla f(\bar{x})$ è ortogonale a G.

Dimostrazione. Basta dimostrare che presa una curva $\gamma\colon [-1, 1] \to G$ sulla superficie, si abbia

$$\big(\gamma'(0), \nabla f(\bar{x})\big) = 0,$$

ovvero che la tangente alla curva è ortogonale al gradiente. Osserviamo che $\big(f \circ \gamma\big)(t) \equiv 0$ in quanto γ individua solo punti di G dove f è per definizione nulla. Quindi

$$\frac{d}{dt}\big(f \circ \gamma\big)(t) = 0,$$

inoltre, per la regola della catena

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big(f \circ \gamma\big)(t) &= f'\big(\gamma(0)\big)\gamma'(0) \\ &= \Big(f'\big(\gamma(0)\big), \gamma'(0)\Big) = 0. \end{aligned}$$

□

2 L'INTEGRALE DI RIEMANN SU PIÙ DIMENSIONI

2.1 INTRODUZIONE

Definizione 2.1 – Rettangolo in $\mathbb{R}^n$

Un *rettangolo* in $\mathbb{R}^n$ si definisce come

$$\mathcal{R} = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \},$$

con $-\infty < a_i < b_i < +\infty$.

Osservazione. Le disuguaglianze su x_i possono essere anche strette.

Definizione 2.2 – Misura di un rettangolo

Si definisce *misura di un rettangolo* $\mathcal{R}$ in $\mathbb{R}^n$ come

$$|\mathcal{R}| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Definizione 2.3 – Funzione semplice

Una funzione $s\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si definisce *semplice*, o *a gradini*, se è del tipo

$$s(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j 1_{\mathcal{R}_j}(x),$$

dove $1_{\mathcal{R}_j}$ è la funzione caratteristica del rettangolo $\mathcal{R}_j$.

Definizione 2.4 – Integrale di una funzione semplice

Sia s una funzione semplice, si definisce *intergrale* di s come

$$\int_{\mathbb{R}^n} s(x)\,dx = \sum_{j=1}^{k} a_j |\mathcal{R}_j|.$$

Proprietà 2.5. Se $s_1, s_2 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono funzioni semplici e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \big(\alpha\, s_1(x) + \beta\, s_2(x)\big)\, dx = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} s_1(x)\, dx + \beta \int_{\mathbb{R}^n} s_2(x)\, dx;$
- $\displaystyle\left|\int_{\mathbb{R}^n} s_1(x)\, dx\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |s_1(x)|\, dx;$
- se $s_1(x) \leqslant s_2(x)$, $\forall\, x$ allora $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} s_1(x)\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} s_2(x)\, dx.$

Proprietà 2.6. Supponiamo che $s \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sia una funzione semplice, allora

$$\int_{\mathbb{R}^2} s(x,y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} s(x,y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} s(x,y)\, dx.$$

Dimostrazione. Per definizione di funzione semplice

$$s(x,y) = \sum_{j=1}^{k} a_j 1_{\mathcal{R}_j}(x,y),$$

quindi il suo integrale sarà

$$\int_{\mathbb{R}^2} s(x,y)\, dx\, dy = \sum_{j=1}^{k} a_j |\mathcal{R}_j|.$$

Ora

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} s(x,y)\, dy = \sum_{j=1}^{k} a_j \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} 1_{\mathcal{R}_j}(x,y)\, dy,$$

dove $1_{\mathcal{R}_j}$, congelando la x, è la funzione caratteristica di un intervallo di y, ora

$$\mathcal{R}_j = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in (\alpha_j, \beta_j), y \in (\gamma_j, \delta_j) \right\},$$

quindi $1_{\mathcal{R}_j}(x,y) = 0$ se $x \notin (\alpha_j, \beta_j)$. Quindi

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} a_j \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} 1_{\mathcal{R}_j}(x,y)\, dy &= \sum_{j=1}^{k} a_j \int_{\mathbb{R}} 1_{(\alpha_j,\beta_j)}(x)(\delta_j - \gamma_j)\, dx \\
&= \sum_{j=1}^{k} a_j (\delta_j - \gamma_j) \int_{\mathbb{R}} 1_{(\alpha_j,\beta_j)}(x)\, dx \\
&= \sum_{j=1}^{k} a_j (\delta_j - \gamma_j)(\beta_j - \alpha_j) \\
&= \sum_{j=1}^{k} a_j |\mathcal{R}_j|.
\end{aligned}$$

□

Osservazione. In generale questo vale su $\mathbb{R}^n$ per ogni funzione a scalini.

Definizione 2.7 – Funzione Riemann integrabile

Una funzione $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice *Riemann integrabile* se l'estremo superiore dell'insieme

$$A = \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\,dx \;\middle|\; u \text{ semplice}, u(x) \leqslant f(x), \forall\, x \right\}$$

coincide con l'estremo inferiore dell'insieme

$$B = \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} v(x)\,dx \;\middle|\; v \text{ semplice}, v(x) \geqslant f(x), \forall\, x \right\}.$$

Definizione 2.8 – Funzione Riemann integrabile (equivalente)

Una funzione $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice *Riemann integrabile* se

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, u, v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ semplici, con } u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x), \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

tali che

$$\int_{\mathbb{R}^n} [v(x) - u(x)]\,dx < \varepsilon.$$

Teorema 2.9 – Equivalenza delle definizioni di Riemann integrabilità

Una funzione $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è R-integrabile rispetto alla prima definizione se e soltanto se lo è rispetto alla seconda.

Dimostrazione. Per la definizione di estremo superiore posso trovare una funzione u semplice, con $u \leqslant f$, tale che $\Rightarrow)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\,dx \geqslant \sup A - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Analogamente trovo una funzione v semplice, con $v \geqslant f$, tale che

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x)\,dx \leqslant \inf B + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quindi $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$ e vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\,dx \leqslant \varepsilon,$$

in quanto $\sup A = \inf B$ per ipotesi.
Dal momento che ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B, per l'assioma di Dedekind, avremo $\Leftarrow)$

$$\sup A \leqslant \inf B.$$

Il viceversa segue direttamente dall'ipotesi, infatti

$$\sup A \geqslant \inf B - \varepsilon,$$

dove ε è piccolo a piacere. Quindi, per doppia inclusione, avremo

$$\sup A = \inf B. \qquad \square$$

Proposizione 2.10 – Proprietà delle funzioni R-integrabili

Ogni funzione f Riemann integrabile è limitata e nulla al di fuori di un compatto

Dimostrazione. Sia f una funzione Riemann integrabile. Per seconda definizione esistono $u, v \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzioni semplici tali che

$$u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x).$$

Ma, in quanto semplici, tali funzioni sono per definizione limitate e ovviamente nulle al di fuori di un compatto. In particolare la funzione

$$u(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j 1_{\mathcal{R}_j}(x),$$

sarà nulla al di fuori dell'unione degli $\mathcal{R}_j$. □

Esempio. Non tutte le funzioni sono R-integrabili, ad esempio

$$D(x) = 1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

infatti se $v(x)$ è una funzione semplice tale che $v(x) \geqslant D(x)$, allora

$$\int_0^1 v(x)\, dx \geqslant 1,$$

mentre se $u(x)$ è semplice tale che $u(x) \leqslant D(x)$, allora

$$\int_0^1 u(x)\, dx \leqslant 0,$$

quindi la definizione di integrabilità non è rispettata.

Proprietà 2.11. Siano $f, g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ due funzioni Riemann integrabili e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right] dx = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx + \beta \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx.$$

Proprietà 2.12. Siano $f, g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ due funzioni Riemann integrabili tali che

$$f(x) \leqslant g(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx.$$

Teorema 2.13 – Condizione di integrabilità

Sia $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua e a supporto compatto. Allora f è Riemann integrabile.

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione in dimensione uno. □

Proposizione 2.14 – Composizione di una funzione continua con una R-integrabile

Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione R-integrabile e sia $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, allora

$$\varphi \circ f,$$

è Riemann integrabile.

Dimostrazione. Segue banalmente dal teorema precedente. □

Corollario. Se f è R-integrabile, allora

- $|f|$ è R-integrabile;
- $f^+(x) = \max\big(f(x), 0\big)$ è R-integrabile;
- $f^-(x) = \max\big(-f(x), 0\big)$ è R-integrabile;
- $e^f, f^2, f^3, \dots$ sono R-integrabili.

Dimostrazione. Basta comporre f con la corrispondente funzione, ad esempio

$$|f| = \varphi \circ f, \text{ con } \varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|.$$

□

Proposizione 2.15 – Prodotto di funzioni R-integrabili

Siano $f_1, f_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzioni R-integrabili, allora

$$g(x) = f_1(x)f_2(x),$$

è R-integrabile.

Dimostrazione. Sfruttiamo il quadrato di binomio,

$$f_1(x)f_2(x) = \frac{1}{2}\big[f_1(x) + f_2(x)\big]^2 - \frac{1}{2}f_1^2(x) - \frac{1}{2}f_2^2(x),$$

quindi g è R-integrabile in quanto la somma e il quadrato di funzioni integrabile è integrabile. □

Proposizione 2.16 – Disuguaglianza in modulo

Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione Riemann integrabile, allora

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx.$$

Definizione 2.17 – Insieme Peano-Jordan misurabile

Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *Peano-Jordan* misurabile se la funzione caratteristica 1_A di A è Riemann integrabile.

Definizione 2.18 – Insieme Peano-Jordan misurabile (equivalente)

Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *Peano-Jordan* misurabile se, comunque preso $\varepsilon > 0$, trovo due famiglie finite di rettangoli disgiunti

$$\left\{ \mathcal{R}_i^{\text{int}} \right\}_{i=0}^{a} \qquad \text{e} \qquad \left\{ \mathcal{R}_j^{\text{est}} \right\}_{j=0}^{b},$$

tali che

- $\bigcup_{i=1}^{a} \mathcal{R}_i^{\text{int}} \subset A \subset \bigcup_{j=1}^{b} \mathcal{R}_j^{\text{est}}$;
- $\sum_{j=1}^{b} \left| \mathcal{R}_j^{\text{est}} \right| - \sum_{i=1}^{a} \left| \mathcal{R}_i^{\text{int}} \right| \leqslant \varepsilon$.

Teorema 2.19 – Equivalenza delle definizioni di misura di Peano-Jordan

Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è Peano-Jordan misurabile rispetto alla prima definizione se e soltanto se lo è rispetto alla seconda.

$\Leftarrow)$ *Dimostrazione.* Dal momento che i rettangoli $\mathcal{R}_i^{\text{int}}$ sono disgiunti, avremo

$$1_{\bigcup_{i=1}^{a} \mathcal{R}_i^{\text{int}}}(x) = \sum_{i=1}^{a} 1_{\mathcal{R}_i^{\text{int}}}(x),$$

ed analogamente

$$1_{\bigcup_{j=1}^{b} \mathcal{R}_j^{\text{est}}}(x) = \sum_{j=1}^{b} 1_{\mathcal{R}_j^{\text{est}}}(x).$$

Osserviamo che $A \subseteq B \implies 1_A \leqslant 1_B$, per cui

$$\sum_{i=1}^{a} \underbrace{1_{\mathcal{R}_i^{\text{int}}}(x)}_{u(x)} \leqslant 1_A(x) \leqslant \sum_{j=1}^{b} \underbrace{1_{\mathcal{R}_j^{\text{est}}}(x)}_{v(x)}.$$

quindi

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\,dx = \sum_{j=1}^{b} \left| \mathcal{R}_j^{\text{est}} \right| - \sum_{i=1}^{a} \left| \mathcal{R}_i^{\text{int}} \right| \leqslant \varepsilon,$$

ovvero, per la seconda definizione di integrabilità, 1_A è Riemann integrabile.

$\Rightarrow)$ Dal momento che 1_A è Riemann integrabile comunque preso $\varepsilon > 0$, posso trovare $\mathcal{R}_i, \mathcal{Q}_j$ e $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$ tali che

corrisponde alla seconda definizione di integrabilità

- $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i 1_{\mathcal{R}_i}(x) \leqslant 1_A(x) \leqslant \sum_{j=1}^{b} \beta_j 1_{\mathcal{Q}_j}(x)$;
- $\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{b} \beta_j 1_{\mathcal{Q}_j}(x)\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{a} \alpha_i 1_{\mathcal{R}_i}(x) + \varepsilon$.

Mi basterebbe quindi che $\alpha_i, \beta_j = 1$ e che $\mathcal{R}_i, \mathcal{Q}_j$ siano disgiunti. Ma posso facilmente supporre che gli insiemi siano disgiunti in quanto, per ogni eventuale intersezione, posso definire nuovi rettangoli, disgiunti, che ricoprano i rettangoli iniziali.

Adesso posso supporre $\alpha_i, \beta_j \in \{0, 1\}$, in quanto, ad esempio, gli $\mathcal{R}_i$ sono disgiunti, quindi se $\mathcal{R}_i \subseteq A$ avremo

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i 1_{\mathcal{R}_i}(x) \leqslant 1_A(x) \implies \alpha_i \leqslant 1,$$

in quanto, preso $x \in A$, esisterà un unico $\mathcal{R}_i$ tale che $x \in \mathcal{R}_\rangle$, ovvero

$$1_{\mathcal{R}_k}(x) = 0, \forall\, k \neq i.$$

Posso quindi porre $\alpha_i = 1$. D'altronde se $\mathcal{R}_i \not\subset A$, avremo $\alpha_i \leqslant 0$ e posso quindi prendere $\alpha_i = 0$.
Ripetendo il medesimo ragionamento per $\mathcal{Q}_j$, avremo che

$$\mathcal{Q}_j \subset A^c \implies \beta_j \geqslant 0,$$

quindi pongo $\beta_j = 0$.

$$\mathcal{Q}_j \cap A \neq \emptyset \implies \beta_j \geqslant 1,$$

quindi pongo $\beta_j = 1$. Infine avremo

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{a} 1_{\mathcal{R}_i}(x) \leqslant 1_A(x) \leqslant \sum_{j=1}^{b} 1_{\mathcal{Q}_j}(x);$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{b} 1_{\mathcal{Q}_j}(x)\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{a} 1_{\mathcal{R}_i}(x)\, dx + \varepsilon.$ □

Esempio. Non tutti gli insiemi sono Peano-Jordan misurabili, infatti, da quanto visto in un esempio precedente, l'insieme

$$\mathbb{Q} \cap [0, 1],$$

non è P-J misurabile.

Esempio. Mostriamo che l'insieme

$$E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \}$$

è P-J misurabile. Basta prendere

$$[0, 1] \times [-\varepsilon/2, \varepsilon/2] \supseteq E \qquad \text{con} \qquad |[0, 1] \times [-\varepsilon/2, \varepsilon/2]| = \varepsilon,$$

e

$$\{1/2\} \times \{0\} \subseteq E \qquad \text{con} \qquad |\{1/2\} \times \{0\}| = 0.$$

Che soddisfano la seconda definizione di misura.

Proposizione 2.20 – Misura di Peano-Jordan in due dimensioni

Sia $[a, b]$ un intervallo compatto e sia $f\colon [a, b] \to [0, +\infty)$ una funzione Riemann integrabile. Allora

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in [a, b], 0 \leqslant y \leqslant f(x) \right\},$$

è Peano-Jordan misurabile e vale

$$|A| = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Dimostrazione. Per la definizione di Riemann integrabilità, dato $\varepsilon > 0$, trovo

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

tali che, definiti,

$$s^+(x) = \sum_{i=1}^{n} 1_{[t_{i-1},t_i)}(t) \sup_{t\in[t_{i-1},t_i)} f(t),$$
$$s^-(x) = \sum_{i=1}^{n} 1_{[t_{i-1},t_i)}(t) \inf_{t\in[t_{i-1},t_i)} f(t),$$

si ha

$$\int_a^b \left[s^+(x) - s^-(x)\right] dx < \varepsilon.$$

Ora mi basta prendere gli stessi rettangoli per soddisfare la definizione di Peano-Jordan misurabilità. Pongo quindi

$$\mathcal{R}_i^{\text{int}} = [t_{i-1}, t_i) \times \left[0, \inf_{t\in[t_{i-1},t_i)} f(t)\right],$$
$$\mathcal{R}_i^{\text{est}} = [t_{i-1}, t_i) \times \left[0, \sup_{t\in[t_{i-1},t_i)} f(t)\right].$$

Quindi, per definizione, avremo

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{R}_i^{\text{int}} \subseteq A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{R}_i^{\text{est}},$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\mathcal{R}_i^{\text{est}}\right| - \sum_{i=1}^{n} \left|\mathcal{R}_i^{\text{int}}\right| = \int_a^b \left[s^+(x) - s^-(x)\right] dx < \varepsilon,$$

che corrisponde alla seconda definizione di misura di Peano-Jordan. □

Teorema 2.21 – Operazioni sugli insiemi P-J misurabili

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ insiemi Peano-Jordan misurabili, allora

- $A \cap B$;
- $A \cup B$;
- $A \setminus B$,

sono Peano-Jordan misurabili.

Dimostrazione. Per definizione avremo che $1_A(x), 1_B(x)$ sono Riemann integrabili, da cui:

- $1_{A\cap B}(x) = 1_A(x)1_B(x)$ che è R-integrabile in quanto prodotto di funzioni R-integrabili. Quindi $A \cap B$ è P-J misurabile.
- $1_{A\cup B}(x) = 1_A(x) + 1_B(x) - 1_A(x)1_B(x)$ che è R-integrabile in quanto somma di funzioni R-integrabili. Quindi $A \cup B$ è P-J misurabile.
- $1_{A\setminus B}(x) = 1_A(x) - 1_A(x)1_B(x)$ che è nuovamente R-integrabile. Quindi $A \setminus B$ è P-J misurabile. □

Osservazione. In generale, se A è P-J misurabile, il complementare di A non lo è, in quanto può risultare infinito. Il problema non si pone se A è un sottoinsieme di un compatto e il complementare è preso al suo interno.

Definizione 2.22 – Riemann integrabile su un insieme P-J misurabile

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme Peano-Jordan misurabile. Diremo che una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ è Riemann integrabile se la funzione $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

è Riemann integrabile.

Notazione. Per definizione poniamo

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)\,dx.$$

Osservazione. Presi $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$ insiemi Peano-Jordan misurabili. Se $f\colon A \to \mathbb{R}$ è una funzione Riemann integrabile, allora $f\colon B \to \mathbb{R}$ è Riemann integrabile e

$$\int_B f(x)\,dx = \int_A f(x)1_B(x)\,dx.$$

2.2 FORMULE DI RIDUZIONE

Definizione 2.23 – Dominio normale

Sia $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ il dominio di una funzione. Diremo che E è un *dominio normale* se, presi $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme Peano-Jordan misurabile e $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ funzioni Riemann integrabili tali che $g(x) \leqslant f(x)$, $\forall\, x \in A$, si ha

$$E = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in A, g(x) \leqslant y \leqslant f(x) \,\}.$$

Osservazione. In altre parole un dominio normale è una regione abbastanza regolare da poter essere delimitata da intervalli e grafici di funzione.

Esempio. Consideriamo il dominio T, in figura 2.1, costituito da un cilindroide con "base" D e compreso tra le funzioni $a(x, y), b(x, y)$. Dalla definizione segue che T e persino D sono domini normali, infatti

$$T = \left\{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \;\middle|\; (x, y) \in D, a(x, y) \leqslant z \leqslant b(x, y) \,\right\},$$

con

$$D = \{\, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b, f(y) \leqslant x \leqslant g(y) \,\}.$$

In questo caso si dice che T è normale al piano xy, con D normale all'asse y.

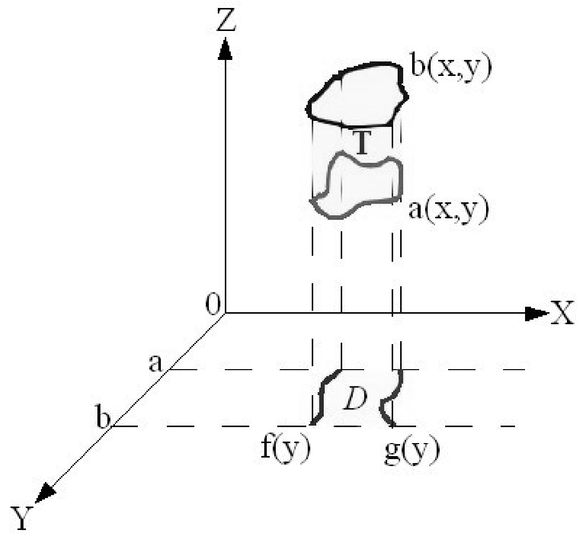

Figura 2.1: Esempio di dominio normale in $\mathbb{R}^3$ al piano xy.

Proposizione 2.24 – Dominio normale è P-J misurabile

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme P-J misurabile e $f, g \colon A \to \mathbb{R}$ funzioni R-integrabili tali che $g(x) \leqslant f(x)$, $\forall\, x \in A$. Allora il dominio normale

$$E = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in A, g(x) \leqslant y \leqslant f(x) \,\},$$

è Peano-Jordan misurabile e vale

$$|E| = \int_A \big[f(x) - g(x)\big]\, dx.$$

Dimostrazione. Segue generalizzando la proposizione 2.20. □

Teorema 2.25 – Formula di riduzione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme Peano-Jordan misurabile e siano $f, g \colon A \to \mathbb{R}$ funzioni Riemann integrabili tali che $g(x) \leqslant f(x)$, $\forall\, x \in A$. Sia

$$E = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in A, g(x) \leqslant y \leqslant f(x) \,\},$$

e sia $h \colon E \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua. Allora

$$\int_E h(x, y)\, dx\, dy = \int_A dx \int_{g(x)}^{f(x)} h(x, y)\, dy.$$

Dimostrazione. Non fornita. □

Archimede chiamava questa figura "zoccolo".

Esempio (dal metodo di Archimede). Consideriamo il dominio

$$Z = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 2y \right\}.$$

Dimostriamo che il volume di Z è pari ad un sesto del volume del cubo circoscritto al cilindro $x^2 + y^2 \leqslant 1$ compreso fra $0 \leqslant z \leqslant 1$.

Scriviamo Z come dominio normale e cerchiamo di applicare il teorema:

$$Z = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x, y) \in B_1(\bar{0}) \cap \{y \geqslant 0\}, 0 \leqslant z \leqslant 2y \right\}.$$

Quindi avremo, per la formula di riduzione,

$$\iiint_Z dx\,dy\,dz = \iint_{B_1(\bar{0})\cap\{y\geqslant 0\}} dx\,dy \int_0^{2y} dz = \iint_{B_1(\bar{0})\cap\{y\geqslant 0\}} 2y\,dx\,dy.$$

A sua volta $B_1(\bar{0}) \cap \{y \geqslant 0\}$ risulta essere un dominio normale, nella fattispecie il semicerchio unitario superiore, con

$$B_1(\bar{0}) \cap \{y \geqslant 0\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1 - x^2} \right\},$$

quindi, applicando nuovamente la formula di riduzione, avremo

$$\begin{aligned}
\iint_{B_1(\bar{0})\cap\{y\geqslant 0\}} 2y\,dx\,dy &= \int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 2y\,dy \\
&= \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,dx \\
&= \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Ora il volume del cubo circoscritto

$$Q = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1, -1 \leqslant z \leqslant 1 \right\},$$

è $|Q| = 8$ la cui sesta parte è proprio $\frac{4}{3}$.

Esempio. Preso il dominio $E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1 \right\}$, calcoliamo

$$\int_E |x|\,dx\,dy\,dz.$$

Vogliamo integrare prima rispetto ad x, scriviamo quindi E come dominio normale:

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y^2 + z^2 \leqslant 1, -\sqrt{1 - y^2 - z^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{1 - y^2 - z^2} \right\},$$

quindi, applicando la formula di riduzione, avremo

$$\begin{aligned}
\iiint_E |x|\,dx\,dy\,dz &= \iint_{\{(y,z)\,|\,y^2+z^2\leqslant 1\}} dy\,dz \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} |x|\,dx \\
&= \iint_{\{(y,z)\,|\,y^2+z^2\leqslant 1\}} dy\,dz\,2 \int_0^{\sqrt{1-y^2-z^2}} |x|\,dx \\
&= \iint_{\{(y,z)\,|\,y^2+z^2\leqslant 1\}} (1 - y^2 - z^2)\,dy\,dz \\
&= \pi - 2 \iint_{\{(y,z)\,|\,y^2+z^2\leqslant 1\}} z^2\,dz\,dy.
\end{aligned}$$

$|x|$ è una funzione pari

spezzo l'integrale ricordando che la superficie del cerchio unitario è π.

Scriviamo $\{ (y,z) \mid y^2+z^2 \leqslant 1 \}$ come dominio normale:

$$\{ (y,z) \mid y^2+z^2 \leqslant 1 \} = \left\{ (y,z) \;\middle|\; -1 \leqslant y \leqslant 1, -\sqrt{1-y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-y^2} \right\},$$

da cui

$$\begin{aligned} \pi - 2 \iint\limits_{\{ (y,z) \mid y^2+z^2 \leqslant 1 \}} z^2 \, dz \, dy &= \pi - 2 \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z^2 \, dz \\ &= \pi - \frac{4}{3} \int_{-1}^{1} (1-y^2)^{\frac{2}{3}} \, dy \end{aligned}$$

che è un integrale di difficile risoluzione.
Un procedimento analogo, ma di più facile calcolo, spezzava l'integrale come segue:

$$\int_{-1}^{1} dx \iint\limits_{E_x} |x| dy \, dz = 2 \int_0^1 x \, dx \iint\limits_{E_x} dy \, dz,$$

con

$$E_x = \{ (y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \} = \{ (y,z) \mid y^2+z^2 \leqslant 1-x^2 \},$$

dalla formula dell'area del cerchio πr^2

che rappresenta nuovamente un cerchio si superficie $\pi(1-x^2)$, che ci permette agilmente di calcolare l'integrale come

$$2 \int_0^1 x \, \pi(1-x^2) \, dx.$$

Esempio. Sul simplesso bidimensionale $T = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x,y > 0, x+y < 1 \right\}$, si calcoliamo il valore di

$$\int\limits_T (x^2 + \sin y) \, dx \, dy.$$

Osserviamo, innanzi tutto, che

$$\int\limits_T (x^2 + \sin y) \, dx \, dy = \int\limits_T x^2 \, dx \, dy + \int\limits_T \sin y \, dx \, dy,$$

scriviamo quindi T come dominio normale sia rispetto ad x che rispetto ad y:

$$\begin{aligned} T &= \{ (x,y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1-x \}, \\ T &= \{ (x,y) \mid 0 < y < 1, 0 < x < 1-y \}. \end{aligned}$$

Quindi, applicando la formula di riduzione, avremo

$$\int_0^1 dy \int_0^{1-y} x^2 \, dx + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \sin y \, dy = \int_0^1 (1-y)^2 \, dy - \int_0^1 \cos(1-x) \, dx,$$

che è un semplice integrale monodimensionale.

Osservazione. Negli esempi precedenti le ipotesi del teorema erano sempre banalmente soddisfatte, in generale è bene accertarsene.
In particolare per mostrare l'uniforme continuità può essere utile richiamare proposizioni precedenti quali, ad esempio, la continuità su un compatto.

2.3 CAMBIAMENTO DI VARIABILE

Teorema 2.26 – Cambio di variabile

Siano $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti e P-J misurabili. Sia $\varphi \colon U \to V$ un diffeomorfismo e supponiamo che
$$\sup_{x \in U} |\det \varphi'(x)| < +\infty.$$
Allora se $f \colon V \to \mathbb{R}$ è R-integrabile anche $(f \circ \varphi) \cdot |\det \varphi'|$ è R-integrabile e si ha
$$\int_V f(y)\, dy = \int_U (f \circ \varphi)(x) |\det \varphi'(x)|\, dx.$$

Dimostrazione. Non fornita. □

Osservazione. Come nel caso monodimensionale si può effettuare un cambio di variabile passando direttamente per il differenziale:
$$\int_V f(y)\, dy = \int_V f\big(y(x)\big)\, d\big(y(x)\big) = \int_U f\big(y(x)\big) \underbrace{\left|\det \frac{\partial y}{\partial x}\right| dx}_{dy}.$$

Proposizione 2.27 – Dilatazione di un dominio

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme P-J misurabile. Preso $r > 0$ consideriamo l'omotetia
$$r\,E = \{\, y \in \mathbb{R}^n \mid y = r\,x, x \in E \,\},$$
allora
$$|r\,E| = r^n |E|.$$

Dimostrazione. Ricordiamo che, per definizione,
$$|r\,E| = \int_{r\,E} dy = \int_{\mathbb{R}^n} 1_{r\,E}(y)\, dy,$$
dove $1_{r\,E} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione ovviamente R-integrabile. Consideriamo quindi $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto r\,x$, per cui
$$\varphi'(x) = \begin{pmatrix} r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r \end{pmatrix} \implies |\det \varphi'(x)| = |r^n| = r^n,$$
dove $r^n \neq 0$ in quanto $r > 0$ per ipotesi. Per cui φ è un diffeomorfismo, possiamo quindi applicare il teorema:
$$\begin{aligned} |r\,E| &= \int_{r\,E} dy = \int_{\mathbb{R}^n} 1_{r\,E}(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} 1_{r\,E}(r\,x) r^n\, dx = r^n \int_{\mathbb{R}^n} 1_E(x)\, dx \\ &= r^n |E|. \end{aligned}$$
□

osserviamo che $r\,x \in r\,E \iff x \in E$

Definizione 2.28 – Trasformazione in coordinate polari

Presa $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, esiste una sola coppia $(\rho, \vartheta) \in (0, +\infty) \times S^1$ tale che

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$$

Rimane in tal modo individuato un diffeomorfismo $(x, y) \mapsto (\rho, \vartheta)$ la cui funzione inversa è

$$\varphi\colon (\rho, \vartheta) \mapsto (x = \rho\cos\vartheta, y = \rho\sin\vartheta),$$

detta *trasformazione in coordinate polari.*

Osservazione. La regolarità della trasformazione è ovvia per la sua definizione. Questo vale anche per la sua inversa, sebbene la sua rappresentazione sia più complicata.

Notazione. ρ e ϑ, che sono funzioni di (x, y), si dicono *coordinate polari* del punto di coordinate cartesiane (x, y).

Proposizione 2.29 – Calcolo di un integrale mediante coordinate polari

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio P-J misurabile e sia $f\colon D \to \mathbb{R}$ una funzione R-integrabile. Se consideriamo $\varphi^{-1}(D) \subseteq (0, +\infty) \times S^1$ il dominio la cui immagine tramite trasformazioni in coordinate polari è precisamente D, allora vale

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{\varphi^{-1}(D)} f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)\rho\,d\rho\,d\vartheta.$$

Dimostrazione. Segue direttamente dal teorema, infatti, per definizione

$$\varphi\colon (0, +\infty) \times S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \begin{pmatrix} \rho \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

per cui

$$\left|\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \vartheta)}\right| = \left|\det \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{pmatrix}\right| = |\rho\cos^2\vartheta + \rho\sin^2\vartheta| = \rho$$

dove $\rho \neq 0$ in quanto $\rho \in (0, +\infty)$, ovvero ammette inversa C^1 per il teorema della funzione inversa. Pertanto φ soddisfa le ipotesi del cambio di variabile. Per ottenere la tesi è quindi sufficiente considerare la restrizione di φ a D. □

Esempio. Calcoliamo l'integrale

$$\iint_C \frac{y}{x^2 + y^2}\,dx\,dy,$$

dove $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geqslant 0, 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4 \right\}$.
Per prima cosa è fondamentale rappresentare graficamente il dominio di integrazione, che, come possiamo vedere nella figura 2.2, corrisponde alla superficie compresa fra due semicerchi superiori.
Essendo un dominio radiale, e presentando nella funzione integranda il termine x^2+y^2, questo integrale si presta molto bene al passaggio in coordinate polari. Scriviamo

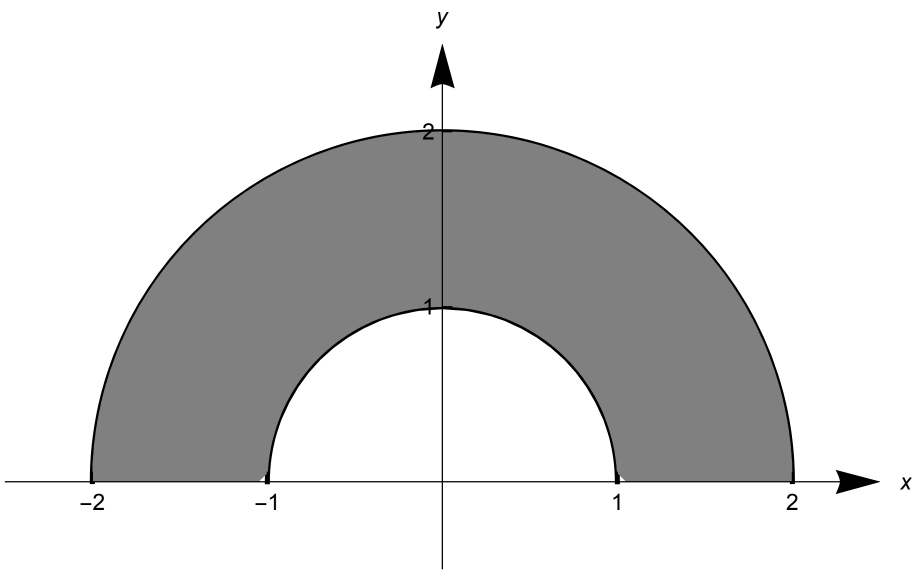

Figura 2.2: Rappresentazione grafica di $C = \left\{ (x, y) \;\middle|\; y \geqslant 0, 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4 \right\}$.

quindi la controimmagine del dominio

$$\varphi^{-1}(C) = \{ (\rho, \vartheta) \mid \vartheta \in [0, \pi], 1 \leqslant \rho \leqslant 2 \}.$$

Per cui avremo

$$\begin{aligned}\iint_C \frac{y}{x^2 + y^2}\, dx\, dy &= \iint_{\varphi^{-1}(C)} \frac{\cancel{\rho} \sin\vartheta}{\cancel{\rho^2}} \cancel{\rho}\, d\rho\, d\vartheta\\ &= \iint_{\varphi^{-1}(C)} \sin\vartheta\, d\rho\, d\vartheta,\end{aligned}$$

dal momento che $\varphi^{-1}(C)$ è già in forma normale, possiamo applicare le formule di riduzione

$$\int_1^2 d\rho \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta = \int_1^2 2\, d\rho = 2.$$

Esempio. Calcoliamo l'integrale

$$\iint_B \frac{dx\, dy}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}},$$

dove $B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \geqslant \frac{1}{4}, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{4} \right\}$.
Dalla rappresentazione grafica di B, figura 2.3, possiamo determinare B in coordinate polari:

$$\varphi^{-1}(B) = \left\{ (\rho, \vartheta) \;\middle|\; -\frac{\pi}{3} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{3}, \frac{1}{2} \leqslant \rho \leqslant \cos\vartheta \right\},$$

dove

- $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ in quanto B è al di fuori della palla centrata nell'origine di raggio $\frac{1}{2}$.

- $\rho \leqslant \cos\vartheta$ in quanto il generico punto sulla palla centrata in $\frac{1}{2}$ determina, nella semicirconferenza, un triangolo rettangolo inscritto di ipotenusa unitaria e

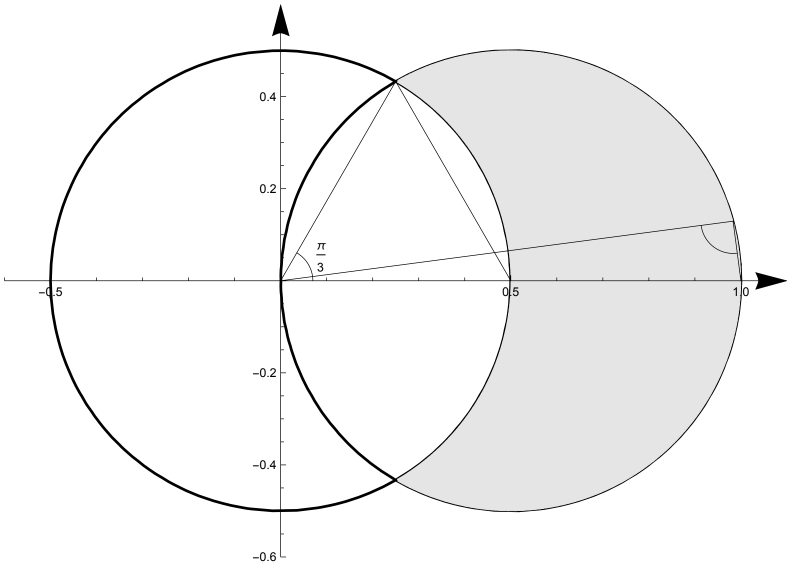

Figura 2.3: Rappresentazione grafica di $B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \geqslant \frac{1}{4}, \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{4} \right\}$.

angolo alla base ϑ.

- $-\frac{\pi}{3} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{3}$ in quanto l'angolo più esteso determina un triangolo equilatero inscritto nell'intersezione delle due circonferenze.

Quindi applicando il cambiamento di variabili, otteniamo

$$\iint_B \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} = \iint_{\varphi^{-1}(B)} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\,d\rho\,d\vartheta,$$

applicando le formule di riduzione,

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\vartheta \int_{\frac{1}{2}}^{\cos\vartheta} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\,d\rho &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[-\sqrt{1-\rho^2}\right]_{\frac{1}{2}}^{\cos\vartheta} d\vartheta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - |\sin\vartheta|\right) d\vartheta = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\vartheta\right) d\vartheta \\
&= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vartheta + \cos\vartheta\right)_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} - 1\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - 1
\end{aligned}$$

Proposizione 2.30 – **Integrale di Gauss**

La superficie sotto la gaussiana è

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}.$$

Dimostrazione. Consideriamo la palla centrata nell'origine di raggio r,

$$B_r(\bar{0}) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqslant r \right\},$$

e il dominio del quadrato centrato nell'origine di lato r,

$$Q(r) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in (-r, r), y \in (-r, r) \right\}.$$

Supponiamo che

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{B_r(\bar{0})} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \, dx \, dy = \lim_{r \to +\infty} \int_{Q(r)} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \, dx \, dy. \tag{$*$}$$

In tal caso avremo, applicando le formule di riduzione,

$$\int_{Q(r)} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \, dx \, dy = \int_{-r}^{r} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx \int_{-r}^{r} e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy \xrightarrow{r} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx \right)^2,$$

ma abbiamo supposto

$$\int_{Q(r)} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \, dx \, dy \cong \int_{B_r(\bar{0})} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \, dx \, dy.$$

Passando in coordinate polari otteniamo

$$\varphi^{-1}\big(B_r(\bar{0})\big) = \left\{ (\rho, \vartheta) \;\middle|\; \rho \in (0, r), \vartheta \in S^1 \right\},$$

quindi

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(\bar{0})} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \, dx \, dy &= \int_{\varphi^{-1}\left(B_r(\bar{0})\right)} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho \, d\rho \, d\vartheta \\
&= \int_{S^1} d\vartheta \int_0^r \rho \, e^{-\frac{\rho^2}{2}} \, d\rho = 2\pi \left[-e^{-\frac{\rho^2}{2}} \right]_0^r \\
&= 2\pi \left[1 - e^{-\frac{\rho^2}{2}} \right] \xrightarrow{r} 2\pi.
\end{aligned}$$

Ovvero, per l'unicità del limite,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx \right)^2 = 2\pi.$$

Resta da dimostrare $(*)$, per farlo mostriamo che la differenza delle due superfici tende a 0:

$$\begin{aligned}
\int_{Q(r) \setminus B_r(\bar{0})} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \, dx \, dy &\leqslant \int_{B_{\sqrt{2}r}(\bar{0}) \setminus B_r(\bar{0})} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \, dx \, dy \\
&= \int_{\left\{ \vartheta \in S^1, r \leqslant \rho \leqslant \sqrt{2}r \right\}} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho \, d\rho \, d\vartheta \\
&= \int_{S^1} d\vartheta \int_r^{\sqrt{2}r} \rho \, e^{-\frac{\rho^2}{2}} \, d\rho \\
&= 2\pi \left[-e^{-\frac{\rho^2}{2}} \right]_r^{\sqrt{2}r} \xrightarrow{r} 0.
\end{aligned}$$

passando alle coordinate polari

□

Osservazione. Tramite le formule di riduzione possiamo calcolare l'integrale di Gauss in n dimensioni, infatti

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{x_1^2}{2}-\dots-\frac{x_n^2}{2}}\,dx_1\dots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_1^2}{2}}\,dx_1\dots\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_n^2}{2}}\,dx_n = \left(\sqrt{2\pi}\right)^n.\end{aligned}$$

Proposizione 2.31 – Volume della sfera n-dimensionale

Consideriamo la generica sfera n-dimensionale unitaria

$$B_n(1) = \left\{ (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1^2+\dots+x_n^2 \leqslant 1 \right\}.$$

Allora, posto ω_n il valore del suo volume, avremo

$$\omega_n = \omega_{n-2}\frac{2\pi}{n}.$$

Dimostrazione. Sfruttiamo le formule di riduzione. Posto $x' = (x_3,\dots,x_n)$ definiamo

$$B^{(x_1,x_2)}(1) = \left\{ x' \in \mathbb{R}^{n-2} \;\middle|\; (x_1,x_2,x') \in B_n(1) \right\}.$$

Quindi, per costruzione,

$$B^{(x_1,x_2)}(1) = \left\{ x' \in \mathbb{R}^{n-2} \;\middle|\; \|x'\|^2 \leqslant 1-(x_1^2+x_2^2) \right\} = B_{n-2}\left(\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)}\right),$$

Posto $\omega_n = |B_n(1)|$, avremo

$$\begin{aligned}\omega_n &= \int_{B_n(1)} dx_1\,dx_2\dots dx_n = \int_{B_2(1)} dx_1\,dx_2 \int_{B^{(x_1,x_2)}(1)} dx' \\ &= \int_{B_2(1)} \left|B^{(x_1,x_2)}(1)\right| dx_1\,dx_2.\end{aligned}$$

Ma abbiamo già osservato che $B^{(x_1,x_2)}(1) = B_{n-2}\left(\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)}\right)$, che corrisponde ad una dilatazione di $B_{n-2}(1)$ di un fattore $\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)}$. Quindi, dalla proposizione 2.27, avremo

$$\int_{B_2(1)} \left|B^{(x_1,x_2)}(1)\right| dx_1\,dx_2 = \int_{B_2(1)} \omega_{n-2}\left[1-(x_1^2+x_2^2)\right]^{\frac{n-2}{2}} dx_1\,dx_2.$$

Passando in coordinate polari,

$$\begin{aligned}\omega_{n-2}\int_{\{(\rho,\vartheta)\,|\,0<\rho<1,\vartheta\in S^1\}} (1-\rho^2)^{\frac{n-2}{2}}\rho\,d\rho\,d\vartheta &= \omega_{n-2}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 (1-\rho^2)^{\frac{n-2}{2}}\rho\,d\rho \\ &= \omega_{n-2}(2\pi)\left[-(1-\rho^2)^{\frac{n-2}{2}+1}\frac{1}{n}\right]_0^1 \\ &= \omega_{n-2}\frac{2\pi}{n}.\end{aligned}$$

$\square$

Esempio. Calcoliamo l'integrale

$$\iint_E \frac{x^2 + x\,y^2}{y^3}\,dx\,dy,$$

dove $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \leqslant y \leqslant 2x, x^2 \leqslant y \leqslant 2x^2 \right\}$.
Tramite un disegno si comprende immediatamente che il calcolo di questo integrale in coordinate cartesiane risulta molto difficoltoso. Utilizziamo quindi il seguente cambio di variabile definito a partire dalla seguente trasformazione:

$$\varphi^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u = \frac{x}{y} \\ v = \frac{x^2}{y} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il dominio nelle nuove coordinate

$$\varphi^{-1}(I) = \left\{ (u, v) \;\middle|\; \frac{1}{2} \leqslant u \leqslant 1, \frac{1}{2} \leqslant v \leqslant 1 \right\}.$$

Per applicare il teorema del cambio di variabile dobbiamo calcolare lo jacobiano di φ, per farlo calcoliamo quello di φ^{-1} e applichiamo il teorema della funzione inversa:

$$\left|\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right| = \left|\det \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{pmatrix}\right| = \left|-\frac{x^2}{y^3} + \frac{2x^2}{y^3}\right| = \frac{x^2}{y^3}.$$

Da cui

$$\left|\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right)^{-1} = \frac{y^3}{x^2}\bigg|_{\substack{x = x(u,v) \\ y = y(u,v)}} = \frac{v}{u^4}.$$

Applicando il cambio di variabile nell'integrale otteniamo:

$$\begin{aligned} \iint_I \frac{x^2 + x\,y^2}{y^3}\,dx\,dy &= \iint_I \frac{x^2}{y^3}\,dx\,dy + \iint_I \frac{x}{y}\,dx\,dy \\ &= \iint_{\varphi^{-1}(I)} du\,dv + \iint_{\varphi^{-1}(I)} u\frac{v}{u^4}\,du\,dv, \end{aligned}$$

$\frac{x^2}{y^3}$ *è l'inverso dello jacobiano di* φ

che è un integrale elementare.

Definizione 2.32 – Trasformazione in coordinate cilindriche

Preso $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, esiste una sola tripla $(\rho, \vartheta, \lambda) \in (0, +\infty) \times S^1 \times \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \\ z = \lambda \end{cases}$$

Rimane in tal modo individuato un diffeomorfismo $(x, y, z) \mapsto (\rho, \vartheta, \lambda)$ la cui funzione inversa è

$$\varphi\colon (\rho, \vartheta, \lambda) \mapsto (x = \rho\cos\vartheta, y = \rho\sin\vartheta, z = \lambda),$$

detta *trasformazione in coordinate cilindriche.*

Osservazione. La figura 2.4 mostra una rappresentazione di un punto in coordinate cilindriche.

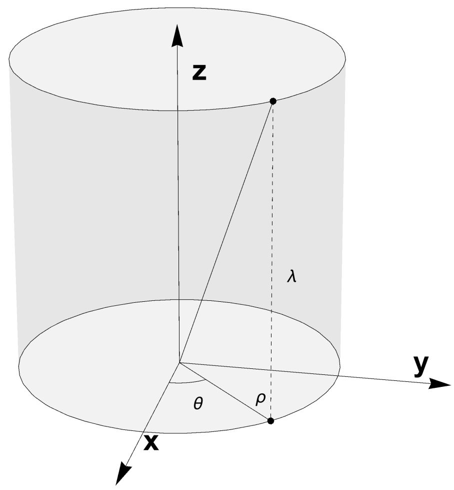

Figura 2.4: Rappresentazione del passaggio da coordinate cartesiane a coordinate cilindriche.

Notazione. ρ, ϑ e λ, che sono funzioni di (x, y, z), si dicono *coordinate cilindriche* del punto di coordinate cartesiane (x, y, z).

Proposizione 2.33 – Calcolo di un integrale mediante coordinate cilindriche

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio P-J misurabile e sia $f\colon D \to \mathbb{R}$ una funzione R-integrabile. Se consideriamo $\varphi^{-1}(D) \subseteq (0, +\infty) \times S^1 \times \mathbb{R}$ il dominio la cui immagine tramite trasformazioni in coordinate cilindriche è precisamente D, allora vale

$$\iiint\limits_{D} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\varphi^{-1}(D)} f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, \lambda)\rho\,d\rho\,d\vartheta\,d\lambda.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella per le coordinate cilindriche, infatti

$$\varphi\colon (0, +\infty) \times S^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, \begin{pmatrix} \rho \\ \vartheta \\ \lambda \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \\ z = \lambda \end{pmatrix}$$

per cui

$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \vartheta, \lambda)} = \left| \det \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \rho\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = |\rho\cos^2\vartheta + \rho\sin^2\vartheta| = \rho$$

dove $\rho \neq 0$ in quanto $\rho \in (0, +\infty)$, ovvero ammette inversa C^1 per il teorema della funzione inversa. Pertanto φ soddisfa le ipotesi del cambio di variabile. Per ottenere la tesi è quindi sufficiente considerare la restrizione di φ a D. $\square$

Esempio. Calcoliamo il volume di

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{3 - 2(x^2 + y^2)} \right\}.$$

Dalla condizione implicita $x^2 + y^2 \leqslant \sqrt{3 - 2(x^2 + y^2)}$ otteniamo

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)^2 \leqslant 3 - 2(x^2+y^2) &\iff (x^2+y^2)^2 + 2(x^2+y^2) - 3 \leqslant 0 \\ &\iff t^2 + 2t - 3 \leqslant 0 \\ &\iff -3 \leqslant t \leqslant 1,\end{aligned}$$

$t = x^2 + y^2$

ovvero $t \leqslant 1$ in quanto $t = x^2 + y^2 \geqslant 0$.
Dal grafico si nota facilmente che il dominio ha simmetria cilindrica, passiamo quindi alle nuove coordinate:

$$\varphi^{-1}(E) = \left\{ (\rho, \vartheta, \lambda) \;\middle|\; \rho \in [0,1], \vartheta \in S^1, \rho^2 \leqslant \lambda \leqslant \sqrt{3 - 2\rho^2} \right\},$$

da cui

$$\begin{aligned}|E| = \int_E dx\,dy\,dz &= \int_{\varphi^{-1}(E)} \rho\,d\rho\,d\vartheta\,d\lambda \\ &= \int_{S^1} d\vartheta \int_0^1 \rho\,d\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{3-2\rho^2}} d\lambda \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(\sqrt{3 - 2\rho^2} - \rho^2\right)\rho\,d\rho,\end{aligned}$$

che è un integrale elementare.

2.4 TEOREMA DI GULDINO E COORDINATE SFERICHE

Definizione 2.34 – Baricentro

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme P-J misurabile contenuto nel semipiano xz con $x \geqslant 0$. Si definisce *baricentro* di D come la posizione media di tutti i suoi punti, ovvero

$$\mathrm{BAR}_D = \frac{1}{\int_D dx\,dz} \left(\int_D x\,dx\,dz, \int_D z\,dx\,dz \right).$$

Notazione. Con lunghezza della curva del baricentro si intende la lunghezza della circonferenza di raggio il baricentro, ovvero

$$2\pi \frac{\int_D x\,dx\,dz}{\int_D dx\,dz}.$$

Teorema 2.35 – di Guldino

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme P-J misurabile tutto contenuto nel semipiano xz con $x \geqslant 0$. Sia E il volume ottenuto ruotando D di 2π attorno all'asse z. Allora $|E|$ è l'area di D moltiplicata per la lunghezza della curva percorsa dal suo baricentro.

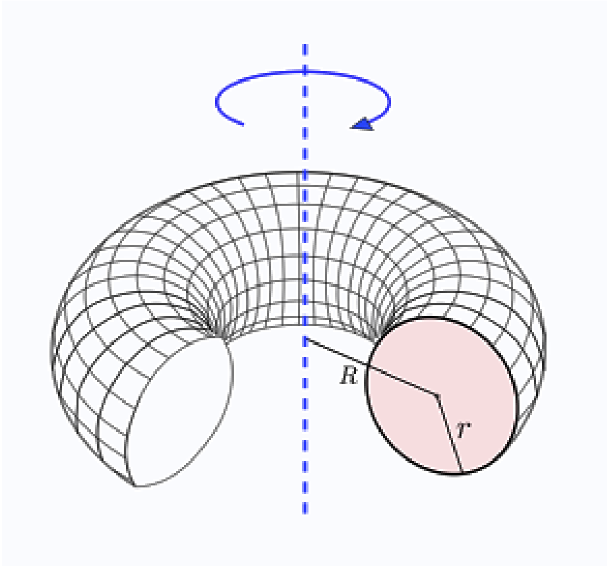

Figura 2.5: Rotazione di un dominio attorno all'asse z.

Dimostrazione. Come si evince dalla figura 2.5, E ha simmetria cilindrica, per cui

$$|E| = \int_E dx\, dy\, dx = \int_{\varphi^{-1}(E)} \rho\, d\rho\, d\vartheta\, d\lambda,$$

con

$$\varphi^{-1}(E) = \left\{ (\rho, \vartheta, \lambda) \,\middle|\, \vartheta \in S^1, (\rho, \lambda) \in D \right\}.$$

Quindi, applicando le formule di riduzione,

$$\int_{\varphi^{-1}(E)} \rho\, d\rho\, d\vartheta, d\lambda = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_D \rho\, d\rho\, d\lambda = 2\pi \int_D \rho\, d\rho\, d\lambda.$$

Dal momento che D si trova sul semipiano $x\,z$, avremo che ρ, λ corrispondono precisamente a x, z, da cui

$$\int_D \rho\, d\rho\, d\lambda = \int_D x\, dx\, dz.$$

Infine, moltiplicando e dividendo per la superficie di D, otteniamo

$$|E| = \int_D dx\, dz \left(2\pi \frac{\int_D x\, dx\, dz}{\int_D dx\, dz} \right). \qquad \square$$

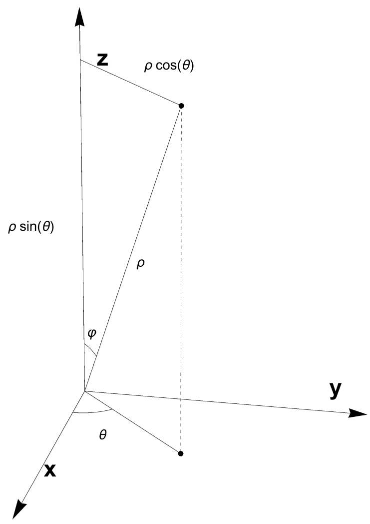

Figura 2.6: Rappresentazione del passaggio da coordinate cartesiane a coordinate sferiche.

Definizione 2.36 – Trasformazione in coordinate sferiche

Preso $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$, esiste una sola tripla $(\rho, \varphi, \vartheta) \in (0, +\infty) \times (0, \pi) \times S^1$ tale che

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\vartheta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\vartheta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

Rimane in tal modo individuato un diffeomorfismo $(x, y, z) \mapsto (\rho, \varphi, \vartheta)$ la cui funzione inversa è

$$\psi \colon (\rho, \varphi, \vartheta) \mapsto (x = \rho \sin\varphi \cos\vartheta, y = \rho \sin\varphi \sin\vartheta, z = \rho \cos\varphi),$$

detta *trasformazione in coordinate sferiche*.

Osservazione. La figura 2.6 mostra una rappresentazione di un punto in coordinate sferiche.

Notazione. ρ, φ e ϑ, che sono funzioni di (x, y, z), si dicono *coordinate sferiche* del punto di coordinate cartesiane (x, y, z).

Proposizione 2.37 – Calcolo di un integrale mediante coordinate sferiche

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio P-J misurabile e sia $f \colon D \to \mathbb{R}$ una funzione R-integrabile. Se consideriamo $\psi^{-1}(D) \subseteq (0, +\infty) \times (0, \pi) \times S^1$ il dominio la cui immagine tramite trasformazioni in coordinate sferiche è precisamente D, allora vale

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\psi^{-1}(D)} f(\rho \sin\varphi \cos\vartheta, \rho \sin\varphi \sin\vartheta, \rho \cos\varphi)\rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\vartheta.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella per le coordinate sferiche e cilindriche, infatti

$$\psi \colon (0,+\infty)\times(0,\pi)\times S^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z\in\mathbb{R}\}, \begin{pmatrix}\rho\\ \varphi\\ \vartheta\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x = \rho\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = \rho\cos\varphi \end{pmatrix}$$

per cui

$$\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\vartheta)} = \left|\det\begin{pmatrix}\sin\varphi\cos\vartheta & \rho\cos\varphi\cos\vartheta & -\rho\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & \rho\cos\varphi\sin\vartheta & \rho\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\end{pmatrix}\right| = \rho^2\sin\varphi$$

dove $\rho^2\sin\varphi \neq 0$ in quanto $\rho\in(0,+\infty)$ e $\varphi\in(0,\pi)$, ovvero ammette inversa C^1 per il teorema della funzione inversa. Pertanto ψ soddisfa le ipotesi del cambio di variabile. Per ottenere la tesi è quindi sufficiente considerare la restrizione di ψ a D. □

Esempio. Calcoliamo $|E|$ definito come il volume interno alla sfera

$$\left\{\, (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \leqslant 2z \,\right\}$$

e sotto il paraboloide

$$\left\{\, (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; z \leqslant 2(x^2+y^2) \,\right\}.$$

Utilizziamo le coordinate sferiche:

$$\psi^{-1}(E) = \left\{\, (\rho,\varphi,\vartheta) \;\middle|\; \vartheta\in S^1, \rho^2 \leqslant 2\rho\cos\varphi, \rho\cos\varphi \leqslant 2\rho^2\sin^2\varphi \,\right\},$$

ovvero

$$\psi^{-1}(E) = \left\{ (\rho,\varphi,\vartheta) \;\middle|\; \vartheta\in S^1, \frac{\cos\varphi}{2\sin^2\varphi} \leqslant \rho \leqslant 2\cos\varphi \right\}.$$

Osserviamo che c'è una condizione implicita:

$$\begin{aligned}\frac{\cos\varphi}{2\sin^2\varphi} \leqslant 2\cos\varphi &\iff \frac{1}{4} \leqslant \sin^2\varphi \\ &\iff \sin\varphi \geqslant \frac{1}{2} \\ &\iff \varphi \in \left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right),\end{aligned}$$

dove abbiamo potuto dividere per $\cos\varphi$ senza preoccuparci del segno in quanto $\varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Da cui, applicando le formule di riduzione,

$$\begin{aligned}\int_E dx\,dy\,dz &= \int_{\psi^{-1}(E)} \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\vartheta \\ &= \int_{S^1} d\vartheta \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,d\varphi \int_{\frac{\cos\varphi}{2\sin^2\varphi}}^{2\cos\varphi} \rho^2\,d\rho \\ &= \frac{2}{3}\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\left[8\cos^3\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{8\sin^6\varphi}\right] d\varphi,\end{aligned}$$

che è un integrale elementare.

2.5 INTEGRALI IMPROPRI

In questo paragrafo ci occuperemo di definire l'integrale di funzioni non nulle su domini illimitati o di funzioni illimitate, ad esempio

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \qquad \text{oppure} \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Ricordiamo che nel caso monodimensionale potevamo scrivere

$$\lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{dx}{x^\alpha} \qquad \text{e} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha},$$

dove gli argomenti dei limiti sono funzioni R-integrabili.

Definizione 2.38 – Insieme illimitato Peano-Jordan misurabile

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremo che A è Peano-Jordan misurabile se $A \cap B_r(\bar{0})$ è Peano-Jordan misurabile per ogni $r > 0$.

Osservazione. Se A è limitato, la definizione coincide con quella originale.
Infatti $A \cap B_r(\bar{0})$ è P-J misurabile se e soltanto se $1_{A\cap B_r(\bar{0})}$ è R-integrabile. Ma $1_{A\cap B_r(\bar{0})} = 1_A \cdot 1_{B_r(\bar{0})}$, dove

$$1_A \cdot 1_{B_r(\bar{0})} = 1_A,$$

per r sufficientemente grande. Quindi 1_A è R-integrabile se e soltanto se A è P-J misurabile.

Definizione 2.39 – Funzione Riemann integrabile (caso positivo)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme P-J misurabile anche illimitato. Diremo che $f\colon A \to [0, +\infty)$ è Riemann integrabile su A se lo è, nel senso originale, su tutti i compatti P-J misurabili contenuti in A e se esiste finito

$$\sup\left\{ \int_K f(x)\,dx \;\middle|\; K \subseteq A, K \text{ compatto, P-J misurabile} \right\}.$$

Notazione. Se f è R-integrabile poniamo per definizione

$$\int_A f(x)\,dx = \sup\left\{ \int_K f(x)\,dx \;\middle|\; K \subseteq A, K \text{ compatto, P-J misurabile} \right\}.$$

Osservazione. Sui compatti $K \subseteq A$ P-J misurabili f è R-integrabile, in particolare sarà limitato. Pertanto eventuali asintoti verticali di f si trovano necessariamente sul bordo di A.

Osservazione. Se A è limitato e f è R-integrabile su A, la definizione si riconduce a quella originale.
Questo è banalmente vero nel caso che A sia compatto, mentre nel caso non lo fosse è sufficiente ricoprire A dall'interno con polirettangoli compatti.

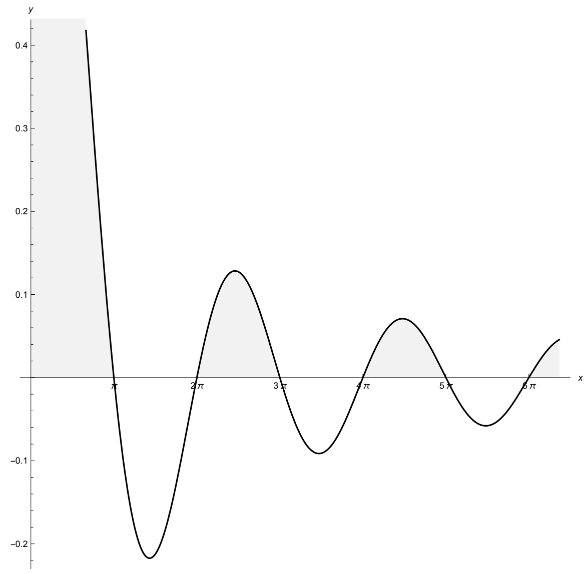

Figura 2.7: La funzione $\frac{\sin x}{x}$ evidenziata nella regione positiva.

Esempio. Questa definizione è problematica con funzione che assumono valori negativi. Consideriamo ad esempio,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

Che sappiamo, per l'analisi monodimensionale, essere convergente. Per la definizione appena data avremo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \overset{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^+ dx.$$

Possiamo vedere nella figura 2.7 come la funzione sia positiva in intervalli di ampiezza π. Da cui

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^+ dx &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi n} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^+ dx \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{2i\pi}^{(2i+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx \\ &\geqslant \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{2i\pi}^{(2i+1)\pi} \frac{\sin x}{(2i+1)\pi}\, dx \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{(2i+1)\pi} = +\infty.\end{aligned}$$

per la divergenza della serie armonica tramite il criterio di condensazione

Quindi questa definizione di integrale improprio si comporta più come l'integrale del modulo.

Definizione 2.40 – Funzione Riemann integrabile (caso generale)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme P-J misurabile anche illimitato. Diremo che $f\colon A \to \mathbb{R}$ è Riemann integrabile se lo sono f^+ e f^-. In tal caso poniamo

$$\int_A f(x)\,dx = \int_A f^+(x)\,dx - \int_A f^-(x)\,dx.$$

Osservazione. Gli integrali su A di f^+ e f^- sono entrambi finiti perché abbiamo chiesto che siano R-integrabili.

Proposizione 2.41 – R-integrabilità del modulo di una funzione

Sia A un insieme P-J misurabile e sia $f\colon A \to \mathbb{R}$. Allora f^+, f^- sono R-integrabili se e soltanto se $|f|$ è R-integrabile.

Dimostrazione. Per definizione $\Rightarrow)$

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x),$$

per cui $|f|$ è R-integrabile per la linearità dell'integrale.
Segue da $\Leftarrow)$

$$|f(x)| \geqslant \begin{cases} f^+(x) \\ f^-(x) \end{cases}$$

□

Osservazione. Quindi, per quanto mostrato nell'esempio precedente, la funzione $\frac{\sin x}{x}$ non è R-integrabile su $(0, +\infty)$, infatti

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty.$$

Proposizione 2.42 – Confronto integrale

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme P-J misurabile e consideriamo $f\colon A \to \mathbb{R}, g\colon A \to [0, +\infty)$. Supponiamo che f sia R-integrabile su ogni compatto P-J misurabile contenuto in A e che g sia R-integrabile. Se

$$|f(x)| \leqslant g(x),\ \forall\, x \in A,$$

allora f è R-integrabile e vale

$$\int_A |f(x)|\,dx \leqslant \int_A g(x)\,dx.$$

Dimostrazione. Affinchè f sia R-integrabile dobbiamo mostrare che l'estremo superiore dell'integrale su tutti i compatti contenuti in A è finito. Dal momento che f è R-integrabile su ogni compatto $K \subseteq A$ P-J misurabile, avremo

$$\int_K |f(x)|\,dx \leqslant \int_K g(x)\,dx,$$

da cui

$$\sup_{K\subseteq A} \int_K |f(x)|\,dx \leqslant \sup_{K\subseteq A} \int_K g(x)\,dx = \int_A g(x)\,dx. \qquad \square$$

Teorema 2.43 – Limite sui compatti per l'integrale improprio

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme P-J misurabile e sia $\{K_j\}$ una catena crescente di compatti P-J misurabili contenuti in A, tali che per ogni compatto $K \subseteq A$ esiste $K_j \supseteq K$. Allora

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{K_j} |f(x)|\,dx < +\infty \iff f \text{ è integrabile su } A,$$

e risulta

$$\int_A |f(x)|\,dx = \lim_{j\to+\infty} \int_{K_j} f(x)\,dx.$$

$\Leftarrow)$ *Dimostrazione.* Supponiamo che f sia integrabile su A, quindi $|f|$ è integrabile, da cui

$$\int_A |f(x)|\,dx \leqslant \sup\left\{ \int_K |f(x)|\,dx \;\middle|\; K \subseteq A, K \text{ compatto, P-J misurabile} \right\} < +\infty.$$

In particolare ogni K_j è un compatto, P-J misurabile, contenuto in A, quindi

$$\int_{K_j} |f(x)|\,dx \leqslant \int_A |f(x)|\,dx,\ \forall\, j,$$

ovvero

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{K_j} |f(x)|\,dx \leqslant \int_A |f(x)|\,dx < +\infty.$$

$\Rightarrow)$ Sia $K \subseteq A$ un compatto P-J misurabile. Per ipotesi esiste $K_j \supseteq K$, quindi, per la monotonia dell'integrale,

$$\int_K |f(x)|\,dx \leqslant \int_{K_j} |f(x)|\,dx, \text{ con } j \text{ sufficientemente grande},$$

da cui

$$\int_K |f(x)|\,dx \leqslant \lim_{j\to+\infty} \int_{K_j} |f(x)|\,dx,\ \forall\, k.$$

In particolare, per definizione di estremo superiore,

$$\sup\left\{ \int_K |f(x)|\,dx \;\middle|\; K \subseteq A, K \text{ compatto, P-J misurabile} \right\} \leqslant \lim_{j\to+\infty} \int_{K_j} |f(x)|\,dx < +\infty,$$

ovvero

$$\int_A |f(x)|\,dx \leqslant \lim_{j\to+\infty} \int_{K_j} |f(x)|\,dx.$$

Resta da dimostrare che l'integrale di f su A corrisponde precisamente al limite sui K_j. Per quanto appena dimostrato sappiamo che

le due frecce lo dimostrano per doppia disuguaglianza

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{K_j} |f(x)|\,dx = \int_A |f(x)|\,dx.$$

Applicando lo stesso ragionamento a f^+ e f^-, che sono anch'esse funzioni positive, avremo

$$\lim_{j\to+\infty}\int_{K_j} f^+(x)\,dx = \int_A f^+(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \lim_{j\to+\infty}\int_{K_j} f^-(x)\,dx = \int_A f^-(x)\,dx.$$

Quindi, per la linearità del limite,

$$\begin{aligned}\lim_{j\to+\infty}\int_{K_j} f(x)\,dx &= \lim_{j\to+\infty}\left[\int_{K_j} f^+(x)\,dx - \int_{K_j} f^-(x)\,dx\right]\\ &= \lim_{j\to+\infty}\int_{K_j} f^+(x)\,dx - \lim_{j\to+\infty}\int_{K_j} f^-(x)\,dx\\ &= \int_A f^+(x)\,dx - \int_A f^-(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx. \qquad \square\end{aligned}$$

Esempio. Troviamo per quali α vale

$$\int_A \frac{dx\,dy}{|x-y|^\alpha} < +\infty,$$

dove

$$A = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x\in[0,1], y\in[0,1], x\neq y \right\}.$$

Sicuramente per $\alpha \leqslant 0$ avremo l'integrabilità in quanto la funzione è limitata su A. Se $\alpha > 0$ l'integrale è improprio in quanto la funzione integranda tende all'infinito lungo la diagonale.

Osserviamo dalla figura 2.8 che $A = A' \cup A''$ con $A' = A''$. Possiamo quindi scrivere

$$\int_A \frac{dx\,dy}{|x-y|^\alpha} = 2\int_{A'} \frac{dx\,dy}{|x-y|^\alpha}.$$

Per applicare il teorema devo trovare una catena di compatti che ricoprano A' su cui la funzione è R-integrabile. Consideriamo quindi tutti gli insiemi in A' privi della diagonale, ovvero

$$K_j = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\leqslant x\leqslant 1-\frac{1}{j}, x+\frac{1}{j}\leqslant y\leqslant 1 \right\}.$$

Applicando il teorema e le formule di riduzione avremo

$$\begin{aligned}2\int_{A'}\frac{dx\,dy}{|x-y|^\alpha} &= 2\lim_{j\to+\infty}\int_{K_j}\frac{dx\,dy}{|x-y|^\alpha}\\ &= 2\lim_{j\to+\infty}\int_0^{1-\frac{1}{j}} dx \int_{x+\frac{1}{j}}^1 \frac{dy}{(y-x)^\alpha}\\ &= 2\lim_{j\to+\infty}\int_0^{1-\frac{1}{j}}\left[\frac{(y-x)^{1+\alpha}}{1-\alpha}\right]_{x+\frac{1}{j}}^1 dx\\ &= \frac{2}{1-\alpha}\lim_{j\to+\infty}\int_0^{1-\frac{1}{j}} (1-x)^{1-\alpha} - \left(\frac{1}{j}\right)^{1-\alpha} dx\\ &= \frac{2}{1-\alpha}\lim_{j\to+\infty}\left[-\frac{(1-x)^{2-\alpha}}{2-\alpha} - x\left(\frac{1}{j}\right)^{1-\alpha}\right]_0^{1-\frac{1}{j}}\\ &= \frac{2}{1-\alpha}\lim_{j\to+\infty}\left[-\frac{1}{2-\alpha}\left(\frac{1}{j}\right)^{2-\alpha} + \frac{1}{2-\alpha} - \left(1-\frac{1}{j}\right)\left(\frac{1}{j}\right)^{1-\alpha}\right],\end{aligned}$$

se $\alpha \neq 1$

se $\alpha \neq 2$

quindi la funzione è integrabile su A per $\alpha < 1$.

i casi $\alpha = 1, 2$ andrebbero gestiti separatamente

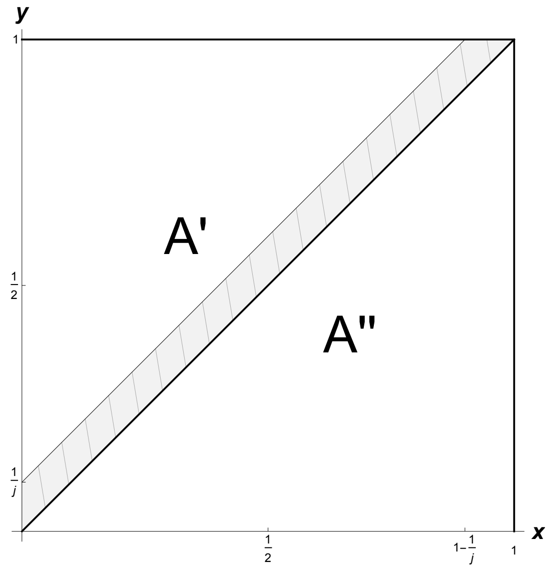

Figura 2.8: Il dominio A ed una visualizzazione dei compatti K_j.

Esempio. Presa una matrice simmetrica A vogliamo calcolare

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\langle x, A\,x\rangle}{2}}\,dx.$$

Nel caso particolare in cui A è diagonale,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

e sapendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{x^2}{2t}}\,dx = \sqrt{2\pi t},\, t > 0,$$

avremo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\langle x, A\,x\rangle}{2}}\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\lambda_1 \frac{x_1^2}{2}} \dots e^{-\lambda_n \frac{x_n^2}{2}}\,dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_1 \frac{x_1^2}{2}}\,dx_1 \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_n \frac{x_n^2}{2}}\,dx_n \\ &= \frac{\sqrt{(2\pi)^n}}{\sqrt{\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n}} = \frac{\sqrt{(2\pi)^n}}{\sqrt{\det A}}. \end{aligned}$$

Vogliamo generalizzare questo procedimento sfruttando la diagonalizzazione di A. Infatti A simmetrica ci garantisce che $A = B^{-1} D\, B$ con D diagonale, per cui

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\langle A\,x, x\rangle}{2}}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\left\langle B^{-1} D\, B\, x, x\right\rangle}{2}}\,dx,$$

dove B è ortogonale, per cui $B^{-1} = {}^tB$, quindi

$$\frac{\left\langle B^{-1} D\, B\, x, x\right\rangle}{2} = \frac{\langle D\, B\, x, B\, x\rangle}{2}.$$

Applichiamo il cambio di variabile $y = B\,x$, per cui $x = B^{-1}\,y \implies dx = \det B^{-1}\,dy$. Ma B^{-1} è una rotazione, per cui $\det B^{-1} = 1$, ovvero $dx = dy$. Applicato all'integrale otteniamo

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\langle D\,y,y\rangle}{2}}\,dy = \frac{\sqrt{(2\pi)^n}}{\sqrt{\det D}} = \frac{\sqrt{(2\pi)^n}}{\sqrt{\det A}},$$

in quanto

$$\det A = \det(B^{-1} D\, B) = \frac{1}{\det B} \det D\, \det B = \det D.$$

3 INTEGRALI DIPENDENTI DA PARAMETRO

3.1 CONTINUITÀ

Definizione 3.1 – Integrale dipendente da parametro

Sia $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$, definiamo *integrale dipendente dal parametro* y la funzione

$$g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, y \mapsto \int\limits_{A(y)} f(x, y)\, dx.$$

Teorema 3.2 – Continuità sotto segno di integrale

Siano $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compatto P-J misurabile e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto. Sia $f \in C(K \times \Omega, \mathbb{R})$, allora

$$g\colon \Omega \to \mathbb{R}, y \mapsto \int\limits_K f(x, y)\, dx,$$

è continua su Ω.

il prodotto di compatti è compatto per il teorema di Tychonoff

Dimostrazione. Sia $y_0 \in \Omega$, dobbiamo mostrare che g è continua in y_0. Dal momento che Ω è aperto posso prendere $r > 0$ tale che $\overline{B_r(y_0)} \subseteq \Omega$. Allora $f\colon K \times \overline{B_r(y_0)} \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua, in quanto f è continua e $K \times \overline{B_r(y_0)}$ è compatto. Quindi, sfruttando una proprietà più debole dell'uniforme continuità, avremo

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 : |(x, y) - (x, y_0)| < \delta \implies |f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon,\ \forall\, x \in K, y \in \overline{B_r(y_0)}.$$

Da cui

$$\begin{aligned} |g(y) - g(y_0)| &= \left| \int\limits_K f(x, y)\, dx - \int\limits_K f(x, y_0)\, dx \right| \\ &\leqslant \int\limits_K |f(x, y) - f(x, y_0)|\, dx \\ &\leqslant \int\limits_K \varepsilon\, dx \qquad \text{quando } d(y, y_0) \leqslant \delta, \end{aligned}$$

quindi $|g(y) - g(y_0)| \leqslant \varepsilon |K|$, ovvero g è continua. □

Teorema 3.3 – Continuità sotto segno di integrale (caso generale)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, anche non limitato, P-J misurabile e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto. Sia $f \in C(A \times \Omega, \mathbb{R})$ e supponiamo che

$$|f(x,y)| \leqslant h(x), \ \forall\, x \in A, y \in \Omega,$$

con $h\colon A \to [0, +\infty)$ integrabile. Allora

$$g\colon \Omega \to \mathbb{R}, y \mapsto \int_A f(x,y)\,dx,$$

è continua su Ω.

Dimostrazione. Dalla definizione di integrale improprio tramite estremo superiore sui compatti P-J misurabile, trovo $K \subset A$ compatto e P-J misurabile tale che

$$\int_K h(x) \geqslant \int_A h(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{4},$$

da cui

$$\int_{A \setminus K} h(x)\,dx = \int_A h(x)\,dx - \int_K h(x)\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Sia $y_0 \in \Omega$, andiamo a mostrare la continuità di g in y_0:

$$\begin{aligned}
|g(y) - g(y_0)| &= \left| \int_A [f(x,y) - f(x,y_0)]\,dx \right| \\
&\leqslant \int_A |f(x,y) - f(x,y_0)|\,dx \\
&= \int_K |f(x,y) - f(x,y_0)|\,dx + \int_{A \setminus K} |f(x,y) - f(x,y_0)|\,dx.
\end{aligned}$$

Dove

$$\int_K |f(x,y) - f(x,y_0)|\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

per il teorema precedente quando $d(y, y_0) \leqslant \delta$. Mentre

$$\begin{aligned}
\int_{A \setminus K} |f(x,y) - f(x,y_0)|\,dx &\leqslant \int_{A \setminus K} |f(x,y)|\,dx + \int_{A \setminus K} |f(x,y_0)|\,dx \\
&\leqslant 2 \int_{A \setminus K} h(x)\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Ovvero

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0 : d(y, y_0) \leqslant \delta \implies |g(y) - g(y_0)| \leqslant \varepsilon,$$

quindi g è continua. □

Osservazione. Se A fosse compatto, il maggiorante sarebbe il $\sup f$.

Esempio (Integrale di Fresnel). Vogliamo calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \overset{\text{df}}{=} \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Definiamo

$$g(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

La strategia è trovare $g(t)$ per $t > 0$, in tal caso avremo

$$g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}.$$

Il problema è verificare la continuità in 0. Per farlo dobbiamo dimostrare che $g\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è continua tramite il teorema di continuità sotto segno di integrale (nel caso generale). Controlliamone le ipotesi:

- $f\colon (0,+\infty)\times(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto e^{-tx}\frac{\sin x}{x}$ è banalmente continua.
- Nell'intorno di $t_0 > 0$ trovo un maggiorante di f che sia integrabile e che non dipenda da t
$$\left| e^{-tx}\frac{\sin x}{x} \right| \leqslant e^{-\frac{t_0}{2}x} \qquad \text{per } t \in \left[\frac{t_0}{2}, +\infty\right),$$
in quanto e^{-tx} è una funzione monotona decrescente e il rapporto $\frac{\sin x}{x}$ si mantiene limitato al crescere di x.

Abbiamo quindi dimostrato la continuità per $t_0 > 0$, resta da verificare la continuità in 0. Affermo che

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

infatti

integro $\sin x$ per parti prendendo 1 come costante additiva

$$\begin{aligned}
g(t) &= \int_0^{+\infty} e^{tx}\frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx \\
&= \lim_{R\to+\infty}\left[\frac{e^{-tx}}{x}(1-\cos x)\Big|_0^R + \int_0^R \frac{xt+1}{x^2}e^{-tx}(1-\cos x)\,dx \right] \\
&= \lim_{R\to+\infty}\int_0^R \frac{xt+1}{x^2}e^{-tx}(1-\cos x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{xt+1}{x^2}e^{-tx}(1-\cos x)\,dx.
\end{aligned}$$

Ora

$$(x,t) \mapsto \frac{xt+1}{x^2}e^{-tx}(1-\cos x),$$

è continua su $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ in quanto

$$\frac{xt+1}{x^2}e^{-tx}(1-\cos x) = e^{-tx}(xt+1)\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}.$$

Cerchiamo il maggiorante integrabile per

$$\left| \frac{xt+1}{x^2}e^{-tx}(1-\cos x) \right|.$$

Consideriamo $l(z) = (z+1)e^{-z}$, dal momento che l è continua e $l(+\infty) = 0$, per Weierstrass generalizzato esiste un massimo, ovvero $|l(z)| \leqslant M$. Quindi

$$\left| \frac{xt+1}{x^2}e^{-tx}(1-\cos x) \right| \leqslant M\frac{1-\cos x}{x^2},$$

che è integrabile. Per cui g è continua in 0 e vale

$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = g(0) = \lim_{R\to+\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Quindi se conoscessimo $g(t)$ per $t > 0$, passando al limite otterremo l'integrale cercato. La conclusione di questo esempio verrà discussa nel prossimo paragrafo.

3.2 DERIVABILITÀ

Teorema 3.4 – Derivata sotto segno di integrale

Siano $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compatto P-J misurabile e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto. Sia $f \in C(K \times \Omega, \mathbb{R})$ tale che $\partial_{y_i} f \in C(K \times \Omega, \mathbb{R})$ per $1 \leqslant i \leqslant m$. Allora

$$g\colon \Omega \to \mathbb{R}, y \mapsto \int_K f(x,y)\,dx,$$

è di classe C^1 e vale

$$g'(y) \cdot h = \int_K \partial_y f(x,y) \cdot h\,dx.$$

Dimostrazione. Basta mostrare che la derivata è data dall'ultima formula, in tal caso sarà continua per il teorema di continuità sotto segno di integrale, in quanto K è compatto e $\partial_y f$ è continua per ipotesi. La strategia sarà dimostrare la continuità di ogni componente di $g'(y)$ per poi applicare il teorema del differenziale totale ed ottenere la continuità della derivata totale.
Supponiamo quindi che $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. Per la definizione di derivata, dobbiamo mostrare che

$$\left| g(y+h) - g(y) - \int_K \partial_y f(x,y) h\,dx \right| = o(|h|).$$

Sfruttiamo il teorema del valore medio di Lagrange. Ricordiamo che in generale, presa una funzione $h\colon U \to \mathbb{R}$ con $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e presi $a, b \in U$ tali che il segmento che congiunge a, b è tutto contenuto in U, vale

$$h(b) - h(a) = h'\big(a + \vartheta(b-a)\big) \cdot (b-a) \qquad \text{con } \vartheta \in [0,1].$$

Per cui, nel nostro caso monodimensionale,

$$\begin{aligned} \left| g(y+h) - g(y) - \int_K \partial_y f(x,y) h\,dx \right| &= \left| \int_K f(x,y+h)\,dx - \int_K f(x,y)\,dx - \int_K \partial_y f(x,y) h\,dx \right| \\ &\leqslant \int_K |f(x,y+h) - f(x,y) - \partial_y f(x,y) h|\,dx \\ &= \int_K |\partial_y f(x, y+\vartheta h) h - \partial_y f(x,y) h|\,dx. \end{aligned}$$

Sappiamo che $\partial_y f$ è continua su $K \times \Omega$ pertanto sarà uniformemente continua su $K \times \overline{B_r(y)}$. Preso $|h| \leqslant \delta$ avremo

$$|\partial_y f(x, y+\vartheta h) h - \partial_y f(x,y) h| = |\partial_y f(x, y+\vartheta h) - \partial_y f(x,y)||h| \leqslant \varepsilon |h|.$$

Da cui

$$\int_K |\partial_y f(x, y+\vartheta h) h - \partial_y f(x,y) h|\,dx \leqslant \int_K \varepsilon |h|\,dx = \varepsilon |K||h| = o\big(|h|\big).$$

□

Osservazione. Nell'espressione

$$g'(y) \cdot h = \int_K \partial_y f(x, y) \cdot h \, dx,$$

abbiamo $g'(y) \in (\mathbb{R}^m)^*, h \in R^m$ e

$$\int_K \partial_y f(x, y) \cdot h \, dx = \left(\int_K \partial_{y_1} f(x, y) \, dx, \ldots, \int_K \partial_{y_m} f(x, y) \, dx \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$$

Teorema 3.5 – Derivata sotto segno di integrale (caso generale)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, anche non limitato, P-J misurabile e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto. Sia $f \in C(A \times \Omega, \mathbb{R})$ e tale che $\partial_{y_i} f(x, y) \in C(K \times \Omega, \mathbb{R})$ per $1 \leqslant i \leqslant m$. Supponiamo che $f(x, y)$ sia integrabile su A per ogni $y \in \Omega$ e

$$|\partial_{y_i} f(x, y)| \leqslant h(x), \ \forall \ x \in A, y \in \Omega, \ \forall \ i \in (1, \ldots, m),$$

con $h \colon A \to [0, +\infty)$ integrabile. Allora

$$g \colon \Omega \to \mathbb{R}, y \mapsto \int_A f(x, y) \, dx,$$

è di classe C^1 e vale

$$\partial_{y_i} g(y) = \int_A \partial_{y_i} f(x, y) \, dx.$$

Dimostrazione. Non fornita. □

Esempio. Concludiamo l'esempio del paragrafo precedente cercando di capire chi è

$$g(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

Affermo che $g'(t)$ esiste per ogni $t > 0$. Verifichiamolo tramite le ipotesi del teorema:

- L'integrabilità di f è già stata verificata nella parte precedente dell'esempio.
- Dobbiamo trovare la maggiorazione uniforme di $\partial_t f$:

$$\left| \partial_t \left(e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \right) \right| = \left| e^{-tx} \sin x \right| \leqslant e^{-\frac{t_0}{2} x} \qquad \text{per } t \in \left[\frac{t_0}{2}, +\infty \right).$$

Quindi g è di classe C^1 e vale

$$g'(t) = -\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x \, dx,$$

il quale, svolto per parti, trova

$$g'(t) = -\frac{1}{1 + t^2},$$

ovvero $g(t) = c - \arctan t$. Da $g(+\infty) = 0$ segue $g(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t$, quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = g(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Esempio. Si calcoli
$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{-(x-t)^2}\,dt.$$
Osserviamo che in questo caso il dominio varia con x. Introduciamo
$$G(a, b, x) = \int_a^b e^{-(x-t)^2}\,dt,$$
avremo quindi $F(x) = G(x, x^2, x)$. Riassumendo F risulta la composizione
$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, x \mapsto (x, x^2, x) \mapsto G(x, x^2, x).$$
In particolare
$$F'(x) = G'(x, x^2, x)\begin{pmatrix}1\\2x\\1\end{pmatrix}$$
dove
$$\begin{aligned}
G'(x, x^2, x) &= \left(\partial_a G|_{(x,x^2,x)}, \partial_b G|_{(x,x^2,x)}, \partial_x G|_{(x,x^2,x)}\right)\\
&= \left(-e^{-(x-a)^2}|_{(x,x^2,x)}, e^{-(x-b)^2}|_{(x,x^2,x)}, \int_a^b -2(x-t)e^{-(x-t)^2}\,dt|_{(x,x^2,x)}\right)\\
&= \left(-1, e^{-(x-x^2)^2}, \int_x^{x^2} -2(x-t)e^{-(x-t)^2}\,dt\right)\begin{pmatrix}1\\2x\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$
da cui è possibile calcolare la primitiva.

4 CURVE E INTEGRALI CURVILINEI

4.1 INTRODUZIONE

Definizione 4.1 – Curva

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Una *curva* in $\mathbb{R}^n$ si definisce come una mappa continua

$$\varphi \colon I \to \mathbb{R}^n.$$

Osservazione. L'intervallo I può essere chiuso, aperto, limitato o illimitato.

Definizione 4.2 – Curva semplice

Una curva φ su I si dice semplice se per ogni coppia di punti interni $t_1, t_2 \in \mathring{I}$ vale $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$.

Definizione 4.3 – Curva chiusa

Una curva φ su I si dice *chiusa* se $I = [a, b]$ con $-\infty < a < b < +\infty$ e $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Esempio. La circonferenza S^1 è sia semplice che chiusa. Infatti se consideriamo la curva

$$\varphi \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

φ è chiusa poiché $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$, inoltre è semplice in quanto

$$\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2), \ \forall\ 0 < t_1 < t_2 < 2\pi.$$

Esempio. L'elica cilindrica

$$\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$$

è iniettiva e semplice.

Esempio. Consideriamo lo strofoide

$$\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 - t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che φ non è semplice in quanto $\varphi(1) = \varphi(-1) = (0, 0)$.

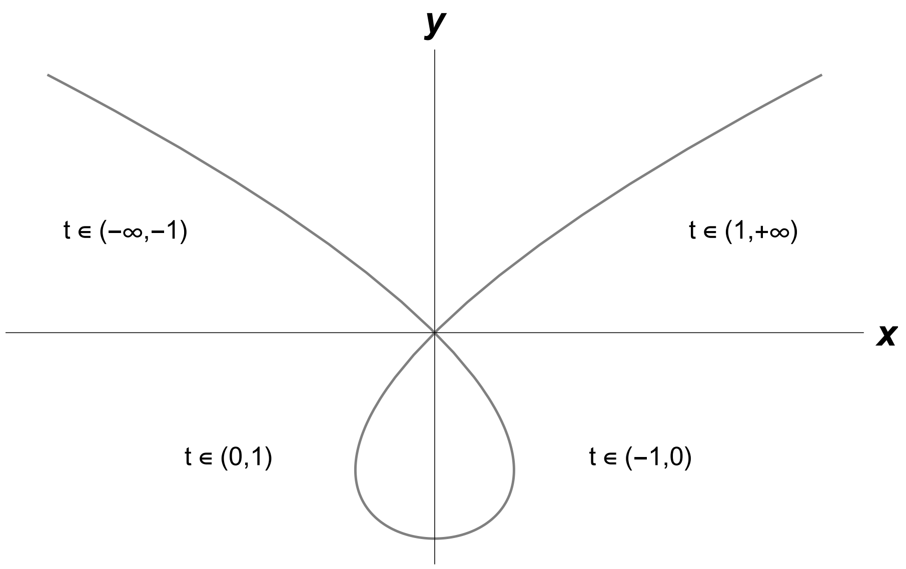

Figura 4.1: Una traccia dello strofoide.

Proviamo a ottenere una traccia della curva:

$$\varphi_x(t) > 0 \iff t(t^2 - 1) > 0 \iff -1 < t < 0 \vee t > 1,$$

analogamente

$$\varphi_y(t) > 0 \iff t^2 - 1 > 0 \iff t^2 < -1 \vee t > 1.$$

Queste considerazioni ci forniscono delle informazioni con cui otteniamo il grafico in figura 4.1.

Definizione 4.4 – Tangente alla curva

Sia φ una curva su I. Supponiamo che φ è differenziabile in $t_0 \in \mathring{I}$ e che $\varphi'(t_0) \neq 0$. Diremo che $\varphi'(t_0)$ è il *vettore tangente* alla curva in t_0 e che

$$\psi \colon \lambda \mapsto \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)\,\lambda$$

è la *retta tangente* alla curva in t_0.

Osservazione. La definizione è ben posta in quanto $\psi(0) = \varphi(t_0)$ e $\psi'(0) = \varphi'(t_0)$.

Definizione 4.5 – Curva regolare

Una curva φ su I di classe C^1 si dice *regolare* se è semplice e se $\varphi'(t)$ è non nullo su tutto I.

4.2 CURVE PARAMETRICHE IN GRAFICI

In questo paragrafo ci occuperemo di stabilire quando una curva parametrica può essere espressa sotto forma di grafico e viceversa.

Consideriamo ad esempio la circonferenza in forma parametrica $\varphi \colon t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Sappiamo che localmente essa può essere scritta come grafico tramite l'applicazione $\psi\colon x \mapsto (x, \sqrt{1-x^2})$, ovvero

$$\{(x,y) \mid y \geqslant 0, x^2+y^2=1\} = \left\{ (x,y) \,\middle|\, -1 \leqslant x \leqslant 1, y = \sqrt{1-x^2} \right\}.$$

Teorema 4.6 – Rappresentazione in forma cartesiana implicita

Sia $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 regolare con $a < b$ finiti. Allora, per ogni $t_0 \in (a,b)$ esiste $r > 0$ tale che

$$\varphi\big([a,b]\big) \cap B_r\big(\varphi(t_0)\big)$$

è il grafico di una mappa $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n-1}$ di classe C^1.

Dimostrazione. La dimostrazione si articola in due passaggi. Il primo, di carattere topologico, in cui andremo a dimostrare che

$$\forall\, \delta > 0 \,\exists\, r > 0 : \varphi(I) \cap B_r\big(\varphi(t_0)\big) \subseteq \varphi\big((t_0-\delta, t_0+\delta)\big).$$

Il secondo, che sfrutta il teorema della funzione inversa, in cui dimostreremo che $\varphi\big((t_0-\delta, t_0+\delta)\big)$ è un grafico.
Supponiamo per assurdo che

$$\exists\, \delta > 0 : \forall\, n > 0, B_{\frac{1}{n}}\big(\varphi(t_0)\big) \cap \varphi(I) \not\subseteq \varphi\big((t_0-\delta, t_0+\delta)\big),$$

cioè che per ogni n esista $t_n \notin (t_0-\delta, t_0+\delta)$ tale che $\varphi(t_n) \in B_{\frac{1}{n}}\big(\varphi(t_0)\big)$. Ora $[a,b]$ è compatto, posso quindi supporre, a meno di sotto successioni, che $t_n \to \bar{t} \in I \setminus (t_0-\delta, t_0+\delta)$. Inoltre $\varphi(t_n) \in B_{\frac{1}{n}}\big(\varphi(t_0)\big) \implies \varphi(t_n) \to \varphi(t_0)$. Del resto φ è continua e $t_n \to \bar{t}$, quindi $\varphi(t_n) \to \varphi(\bar{t})$; ovvero $\varphi(\bar{t}) = \varphi(t_0)$. Ma $\bar{t} \in I \setminus (t_0-\delta, t_0+\delta) \implies t_0 \neq \bar{t}$. Ciò è assurdo in quanto la curva è semplice.
Per ipotesi $\varphi'(t_0) \neq 0$, dove

$$\varphi'(t_0) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(t_0) \\ \dots \\ \varphi_n'(t_0) \end{pmatrix}$$

ciò significa che almeno una componete $\varphi_i'(t_0)$ è non nulla. Supponiamo per semplicità che $\varphi_1'(t_0) \neq 0$ e, a meno di cambiare il segno, supponiamo che $\varphi_1'(t_0) > 0$. Quindi avremo

$$\varphi_1\colon (t_0-\delta, t_0+\delta) \to \mathbb{R}, \varphi_1 \in C^1, \varphi_1'(t_0) > 0.$$

Se δ è sufficientemente piccolo φ_1 è invertibile sull'immagine per il teorema della funzione inversa. Poniamo quindi $g = \varphi_1^{-1}$ per ottenere che $\varphi\big((t_0-\delta, t_0+\delta)\big)$ è il grafico di

$$\psi\colon x_1 \to \big(\varphi_2 \circ g(x_1), \varphi_3 \circ g(x_1), \dots, \varphi_n \circ g(x_1)\big),$$

ovvero

$$\varphi\big((t_0-\delta, t_0+\delta)\big) = \left\{ \big(x_1, \psi(x_1)\big) \,\middle|\, x_1 \in (t_0-\delta, t_0+\delta) \right\}.$$ □

Osservazione. Sul bordo, se $\varphi(a) = \varphi(b)$ e $\varphi'(a) = \varphi'(b)$, il teorema vale lo stesso.

Osservazione. Il teorema è locale. Abbiamo già visto come la circonferenza sia solo localmente un grafico.

Osservazione. Il teorema è falso se la curva non è semplice. Ad esempio lo strofoide in un intorno dell'origine non è il grafico di nessuna funzione di x o di y.

Osservazione. Se $\varphi'(t) = 0$ per qualche t, il grafico non è di classe C^1. Ad esempio $\varphi(t) = (t^3, t^2)$ è di classe C^1, iniettiva ma in $\varphi(0) = 0$ si ha $\varphi'(0) = 0$. Infatti la funzione grafico $y(x) = |x|^{2/3}$ non è di classe C^1.

Osservazione. Il teorema è falso se l'intervallo non è compatto. Ad esempio

$$\varphi\colon (0,2] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{cases} \left(t, \sin\frac{1}{t}\right) & \text{se } t \in (0,1] \\ \text{raccordo con l'asse } y & \text{se } t \in [1,2] \end{cases}$$

non è il grafico di nessuna funzione.

4.3 LUNGHEZZA DELLE CURVE

Definizione 4.7 – Lunghezza della curva

Sia $[a,b]$ un intervallo compatto e sia $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continua. Associamo ad ogni partizione

$$\mathcal{P} = \{\, t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_p = b \,\},$$

la lunghezza

$$L(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{p} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|.$$

Si definisce *lunghezza* della curva φ l'estremo superiore delle lunghezze su tutte le partizioni di $[a,b]$, ovvero

$$L(\varphi) = \sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P}).$$

Notazione. Se $L(\varphi) < +\infty$ diremo che la curva φ è *rettificabile*.

Esempio. Non tutte le curve sono rettificabili, consideriamo ad esempio

$$\varphi\colon \left[0, \frac{1}{\pi}\right] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{cases} \left(t, t\cos\frac{1}{t}\right) & t \in \left(0, \frac{1}{\pi}\right] \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

che è per definizione continua.
Come partizione considero $\mathcal{P} = \left\{\, 0, \frac{1}{n\pi}, \frac{1}{(n-1)\pi}, \ldots, \frac{1}{\pi} \,\right\}$. In generale vale

$$|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \geqslant |\varphi_y(t_i) - \varphi_y(t_{i-1})|,$$

per cui

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}) = {} & \left|\varphi\left(\frac{1}{\pi}\right) - \varphi\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right| + \left|\varphi\left(\frac{1}{2\pi}\right) - \varphi\left(\frac{1}{3\pi}\right)\right| + \ldots \\ & + \left|\varphi\left(\frac{1}{(n-1)\pi}\right) - \varphi\left(\frac{1}{n\pi}\right)\right| \\ & \geqslant \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\right) + \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{3\pi}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(n-1)\pi} + \frac{1}{n\pi}\right), \end{aligned}$$

ovvero, tralasciando i termini che compaiono una volta sola,

$$\begin{aligned}L(\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \geqslant 2\left(\frac{1}{2\pi} + \ldots + \frac{1}{n\pi}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(1 + \ldots + \frac{1}{n}\right) \to +\infty.\end{aligned}$$

Teorema 4.8 – Condizione per rettificare

Sia $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1. Allora φ è rettificabile e vale

$$L(\varphi) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt.$$

Dimostrazione. $[a, b]$ è compatto e φ è di classe C^1, quindi $\|\varphi'\|$ è chiaramente integrabile su $[a, b]$. Per dimostrare il teorema è quindi sufficiente mostrare che vale l'uguaglianza:

$\leqslant)$ Consideriamo una generica partizione $\mathcal{P} = \{ t_0 = a < t_1 < \ldots < t_p = b \}$, dobbiamo dimostrare che

$$L(\mathcal{P}) \leqslant \int_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt.$$

Applicando la definizione

$$\begin{aligned}L(\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{p} \|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\| \overset{\text{TFC}}{=} \sum_{i=1}^{p} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(s) \, ds \right\| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{p} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\varphi'(s)\| \, ds = \int_a^b \|\varphi'(s)\| \, ds.\end{aligned}$$

$\geqslant)$ φ' è continua sul compatto $[a, b]$ pertanto vi è uniformemente continua. Dato $\varepsilon > 0$ trovo $\delta > 0$ tale che $|\varphi'(s) - \varphi'(t)| < \varepsilon$ quando $|t - s| < \delta$. Prendo quindi $\mathcal{P} = \{ t_0 = a < t_1 < \ldots < t_p = b \}$ con $|t_i - t_{i-1}| < \delta$. Ora

$$\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) \overset{\text{TFC}}{=} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(t) \, dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(s) \, dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\varphi'(t) - \varphi'(s)\right] dt,$$

con $\varphi'(s)$ costante in t e $s \in [t_{i-1}, t_i]$. Quindi

$$\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(s)(t_i - t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\varphi'(t) - \varphi'(s)\right] dt,$$

da cui

$$\varphi'(s) = \frac{\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} + \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\varphi'(s) - \varphi'(t)\right] dt.$$

Passo al modulo e ottengo

$$\begin{aligned}\|\varphi'(s)\| &\leqslant \frac{\|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\|}{t_i - t_{i-1}} + \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\|\varphi'(s) - \varphi'(t)\|}_{\leqslant \varepsilon \text{ poiché } |s-t| < \delta} \, dt \\ &\leqslant \frac{\|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\|}{t_i - t_{i-1}} + \varepsilon.\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_a^b \|\varphi'(s)\|\,ds &= \sum_{i=1}^p \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\varphi'(s)\|\,ds \leqslant \sum_{i=1}^p \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\frac{\|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})\|}{t_i - t_{i-1}} + \varepsilon\right] ds \\ &= \sum_{i=1}^p \|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})\| + \varepsilon(b-a) = L(\varphi) + \varepsilon(b-a),\end{aligned}$$

con ε arbitrario, ovvero

$$L(\varphi) \geqslant \int_a^b \|\varphi'(s)\|\,ds. \qquad \square$$

Esempio. Calcoliamo la lunghezza della circonferenza

$$\varphi\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \varphi(t) \to \begin{pmatrix}\cos t \\ \sin t\end{pmatrix}$$

φ è ovviamente di classe C^1, quindi per il teorema avremo

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \|\varphi'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi.$$

Esempio. Supponiamo che $f \in C^1\big([a, b]\big)$, calcoliamo la lunghezza di

$$\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ f(t)\end{pmatrix}$$

Avremo

$$L(\varphi) = \int_a^b \|\varphi'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(t)\big)^2}\,dt$$

Teorema 4.9 – Indipendenza della lunghezza dalle parametrizzazioni

Sia $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva e sia $\psi\colon [c, d] \to [a, b]$ continua e strettamente monotona, allora

$$L(\varphi) = L(\varphi \circ \psi).$$

Dimostrazione. Basta dimostrare che $L(\varphi) \geqslant L(\varphi \circ \psi)$, infatti la disuguaglianza opposta viene ponendo $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \psi$ e $\tilde{\psi} = \psi^{-1}$, infatti

$$L(\tilde{\varphi}) \geqslant L(\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}) \iff L(\varphi \circ \psi) \geqslant L(\varphi).$$

Per definizione

$$L(\varphi \circ \psi) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^p \|\varphi \circ \psi(t_i) - \varphi \circ \psi(t_{i-1})\|.$$

Dal momento che ψ è monotona, supponiamo crescente, avremo

$$a = \underbrace{\psi(c)}_{\tilde{t}_0} < \underbrace{\psi(t_1)}_{\tilde{t}_1} < \underbrace{\psi(t_2)}_{\tilde{t}_2} < \ldots < \underbrace{\psi(t_p)}_{\tilde{t}_p} = \psi(d) = b.$$

Inoltre ψ è un omeomorfismo, quindi risulta che $\tilde{\mathcal{P}} = \{\, a = \tilde{t}_0 < \ldots < \tilde{t}_p = b \,\}$ è ancora una partizione. Quindi

$$L(\varphi \circ \psi) \leqslant \sup_{\tilde{\mathcal{P}}} \sum_{i=1}^p \big\|\varphi(\tilde{t}_i) - \varphi(\tilde{t}_{i-1})\big\| = L(\varphi).$$

Dove la disuguaglianza vale dal momento che da una partizione di $[c, d]$ ottengo una di $[a, b]$ ma non posso dire a priori se è vero il viceversa. $\square$

Osservazione. Se ψ fosse stato anche differenziabile avremmo potuto usare il cambio di variabile, infatti:

$$\begin{aligned} L(\varphi \circ \psi) &= \int_c^d \left\| \frac{d}{dt} \varphi \circ \psi(t) \right\| dt = \int_c^d \left\| \varphi'|_{\psi(t)} \psi'(t) \right\| dt \\ &= \int_c^d \|\varphi' \circ \psi(t)\| |\psi'(t)| \, dt, \end{aligned}$$

da cui, posto $s = \psi(t) \implies ds = |\psi'(t)| \, dt$, ottengo

$$\int_a^b \|\varphi'(s)\| \, ds = L(\varphi).$$

Esempio. Troviamo la lunghezza della curva in coordinate polari. Sia

$$\varphi \colon [a, b] \to (0, +\infty) \times S^1, t \mapsto \begin{pmatrix} \rho(t) \\ \vartheta(t) \end{pmatrix}$$

Voglio dimostrare che se φ è di classe C^1 allora vale

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\rho'(t))^2 + \rho^2(t)(\vartheta'(t))^2}.$$

In coordinate polari avremo

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(t) \cos(\vartheta(t)) \\ \rho(t) \sin(\vartheta(t)) \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho'(t) \cos(\vartheta(t)) - \rho(t) \sin(\vartheta(t))\vartheta'(t) \\ \rho'(t) \sin(\vartheta(t)) + \rho(t) \cos(\vartheta(t))\vartheta'(t) \end{pmatrix}$$

Quindi $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(\rho'(t))^2 + \rho^2(t)(\vartheta'(t))^2}$, da cui

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt = \int_a^b \sqrt{(\rho'(t))^2 + \rho^2(t)(\vartheta'(t))^2} \, dt.$$

Esempio. Calcoliamo la lunghezza del cardioide espressa in coordinate polari

$$\varphi \colon [0, 2\pi] \to (0, +\infty) \times S^1, t \mapsto \begin{pmatrix} 2(1 + \cos t) \\ t \end{pmatrix}$$

Ora $\rho'(t) = -2 \sin t$ e $\vartheta'(t) = 1$, quindi, per quanto osservato nell'esercizio precedente,

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 t + 4(1 + \cos t)^2} \, dt = 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos t} \, dt.$$

Esempio. Si dimostri che la curva

$$\varphi \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

parametrizza $S^1 \cap \{ (x, y) \mid x \geqslant 0 \}$.

Osserviamo che

$$\|\varphi(t)\|^2 = \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1.$$

Inoltre ricordiamo la ben nota sostituzione

$$t = \tan\frac{x}{2} \implies \begin{cases} \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

Da cui si giunge facilmente alla tesi.

4.4 INTEGRALE DI UNA FUNZIONE SU UNA CURVA

Si consiglia la visione di `https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/42/Line_integral_of_scalar_field.gif` per un'interpretazione grafica dell'integrale di linea.

Definizione 4.10 – Integrale di una funzione su una curva

Sia $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 e sia $f\colon \mathrm{Im}(\varphi) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Definiamo l'integrale di f su φ come

$$\int_{\varphi} f\,ds = \int_a^b f(\varphi(t))\|\varphi'(t)\|\,dt.$$

Notazione. Con il termine ds si indica che l'integrale è effettuato su un'ascissa curvilinea.

Osservazione. $\mathrm{Im}(\varphi) \in \mathbb{R}^n$ è compatto in quanto immagine continua di un compatto.

Osservazione. Se $f \equiv 1$ ritroviamo la definizione di lunghezza di una curva.

Teorema 4.11 – Indipendenza dell'integrale dalle parametrizzazioni

Sia $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 e sia $f\colon \mathrm{Im}(\varphi) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $\psi\colon [c,d] \to [a,b]$ è una mappa di classe C^1 invertibile, allora

$$\int_{\varphi} f\,ds = \int_{\varphi\circ\psi} f\,ds.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella fatta per l'indipendenza della lunghezza di una curva rispetto alla parametrizzazione. Infatti

pongo $s = \psi(t), ds = |\psi'(t)|\,dt$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\varphi\circ\psi} f\,ds &= \int_c^d f\big(\varphi\circ\psi(t)\big)\left\|\frac{d}{dt}\varphi\circ\psi(t)\right\|dt\\ &= \int_c^d f\big(\varphi\circ\psi(t)\big)\left\|\varphi'|_{\psi(t)}\right\||\psi'(t)|\,dt\\ &= \int_a^b f\big(\varphi(s)\big)\|\varphi'(s)\|\,ds\\ &= \int\limits_{\varphi} f\,ds.\end{aligned}$$

□

Esempio. Consideriamo la spirale logaritmica espressa in coordinate polari

$$\varphi\colon \left[0,\frac{\pi}{4}\right] \to (0,+\infty)\times S^1, \vartheta \mapsto \begin{pmatrix} e^{a\vartheta}\\ \vartheta\end{pmatrix}, a>0.$$

Una proprietà interessante è che l'angolo della tangente alla curva con il raggio non dipende da ϑ. Dimostriamolo:

$$\begin{pmatrix} x(\vartheta)\\ y(\vartheta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{a\vartheta}\cos\vartheta\\ e^{a\vartheta}\sin\vartheta\end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x'(\vartheta)\\ y'(\vartheta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,e^{a\vartheta}\cos\vartheta - e^{a\vartheta}\sin\vartheta\\ a\,e^{a\vartheta}\sin\vartheta + e^{a\,q}\cos\vartheta\end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{aligned}\cos\alpha(\vartheta) &= \frac{\left\langle \left\|\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}\right\|, \left\|\begin{pmatrix} x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}\right\|\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix} x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}\right\|}\\ &= \dots\\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}.\end{aligned}$$

Osservazione. Questo risultato può essere applicato al problema dei quattro cani ai vertici di un quadrato di lato 1 che si rincorrono con velocità unitaria. Il tempo percorso prima della collisione è $T = \frac{1}{1} = 1$. Se vogliamo la traiettoria dobbiamo osservare che il cane percorre una spirale logaritmica di raggio $\frac{\pi}{4}$. Possiamo quindi trovare il parametro

$$\begin{aligned} a : \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\alpha &= \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\\ \implies \frac{1}{2} &= \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\\ \implies a^2+1 &= 2a^2\\ \implies a^2 = 1 &\implies a = -1.\end{aligned}$$

5 FORME DIFFERENZIALI

5.1 INTRODUZIONE

Definizione 5.1 – Forma differenziale

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Una *forma differenziale* in Ω è una funzione continua

$$F \colon \Omega \to \left(\mathbb{R}^n\right)^*.$$

Definizione 5.2 – Base duale

Presa $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$, la base duale

$$\{dx_1, \dots, dx_n\},$$

è una base di $\left(\mathbb{R}^n\right)^*$ univocamente identificata dalla seguente relazione

$$dx_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

Osservazione. Con dx_i abbiamo quindi definito un operatore lineare di $\mathbb{R}^n$ che al generico vettore $h \in \mathbb{R}^n$ associa la sua componente i-esima h_i.

Definizione 5.3 – Integrale di una forma differenziale lungo una curva

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $F \colon \Omega \to \left(\mathbb{R}^n\right)^*$ una forma differenziale. Sia $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 su $[a, b]$ compatto. Definiamo l'integrale di F lungo γ come

$$\int_\gamma F = \int_a^b F\big(\gamma(t)\big)\dot{\gamma}(t)\, dt.$$

Osservazione. Nell'ultima uguaglianza, le dimensione dei termini sono ben definite, infatti

$$F\big(\gamma(t)\big) \in \left(\mathbb{R}^n\right)^* \qquad \text{e} \qquad \dot{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^n.$$

Osservazione. Il termine $\dot{\gamma}(t)$ indica il versore tangente alla curva orientato nella direzione di spostamento di γ.

Osservazione. Questa definizione corrisponde, in fisica, alla definizione di lavoro svolto per passare da $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ sotto l'azione del campo di forze F.

Osservazione. Una scrittura equivalente è la seguente:

$$\int_{\gamma} F = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} F_i(\gamma(t))\dot{\gamma}_i(t)\,dt.$$

Esempio. Consideriamo la seguente forma differenziale

$$F\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to (\mathbb{R}^2)^*, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

E la curva che parametrizza la circonferenza

$$\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$$

Calcoliamo l'integrale di F lungo γ:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} F &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{R\sin t}{R^2}, \frac{R\cos t}{R^2}\right) \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sin^2(t) + \cos^2(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.
\end{aligned}$$

Dal risultato ci viene il sospetto che F sia la forma differenziale che conta i giri attorno all'origine.

Definizione 5.4 – Potenziale di una forma differenziale

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $F\colon \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale. $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ si dice *potenziale* di F se

$$F(x) = V'(x),\ \forall\, x \in \Omega.$$

Notazione. Scriveremo $dV(x) = V'(x)$.

Definizione 5.5 – Forma differenziale esatta

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $F\colon \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale. F si definisce *forma differenziale esatta* se esiste un potenziale $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ di F.

Osservazione. Se $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ è un potenziale di F, allora V' è un elemento del duale di R^n, ovvero

$$V'(x) = \left(\partial_1 V(x), \ldots, \partial_n V(x)\right) = \partial_1 V(x)\,dx_1 + \ldots + \partial_n V(x)\,dx_n.$$

In particolare, se $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è una curva di classe C^1, avremo

$$\begin{aligned}\int_\gamma F = \int_\gamma V' &= \int_a^b \left(\partial_1 V(x), \dots, \partial_n V(x)\right)\big|_{\gamma(t)} \begin{pmatrix}\dot\gamma_1(t)\\ \vdots \\ \dot\gamma_n(t)\end{pmatrix} dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} V\big(\gamma(t)\big)\, dt \\ &= V\big(\gamma(b)\big) - V\big(\gamma(a)\big).\end{aligned}$$

applicando prima la regola della catena e poi il TFC

Teorema 5.6 – Indipendenza dalla parametrizzazione

Siano $F\colon \Omega \to \left(\mathbb{R}^n\right)^*$ una forma differenziale e $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ una curva di classe C^1. Sia $\psi\colon [c,d] \to [a,b]$ di classe C^1. Allora

- Se $\psi(c) = a$ e $\psi(d) = b \implies \displaystyle\int_{\gamma\circ\psi} F = \int_\gamma F.$
- Se $\psi(c) = b$ e $\psi(d) = a \implies \displaystyle\int_{\gamma\circ\psi} F = -\int_\gamma F.$

Dimostrazione. Mostriamo il caso in cui $\psi(c) = a$ e $\psi(d) = b$, il secondo caso è del tutto analogo.
Applicando la definizione avremo

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\psi} F &= \int_c^d F\big(\gamma\circ\psi(t)\big) \frac{d}{dt}\gamma\circ\psi(t)\, dt \\ &= \int_c^d F\big(\gamma\circ\psi(t)\big)\dot\gamma|_{\psi(t)}\psi'(t)\, dt \\ &= \int_a^b F\big(\gamma(s)\big)\dot\gamma(s)\, ds \\ &= \int_\gamma F.\end{aligned}$$

regola della catena

pongo $s = \psi(t)$

□

5.2 PULL-BACK

Prima di addentrarci nel problema del pull-back, vorremmo poter definire le seguenti relazioni

$$\int_{-\gamma} F = -\int_\gamma F \qquad \text{e} \qquad \int_{\gamma_1+\gamma_2} F = \int_{\gamma_1} F + \int_{\gamma_2} F,$$

facendo attenzione che con $-\gamma$ non si intende la funzione che associa ad ogni t il valore $-\gamma(t)$ ma bensì la curva che percorre γ nel verso contrario.

analogamente con $\gamma_1 + \gamma_2$ *si fa riferimento alla curva che percorre prima* γ_1 *e poi* γ_2

Per dare una veste rigorosa a questa definizione osserviamo che γ è un elemento del duale delle forme differenziali. Infatti, fissato γ, trovo

$$A_\gamma\colon F \mapsto \int_\gamma F,$$

ovvero l'operatore lineare che manda le forme differenziali in $\mathbb{R}$. Ora, in quanto operatore lineare,

$$A_\gamma(a F_1 + b F_2) = \int_\gamma (a F_1 + b F_2) = a \int_\gamma F_1 + b \int_\gamma F_2 = a A_\gamma(F_1) + b A_\gamma(F_2).$$

Quindi con $\gamma_1 + \gamma_2$ o $-\gamma$ si intende rispettivamente $A_{\gamma_1} + A_{\gamma_2}$ o $-A_\gamma$, ovvero un'operazione fra operatori lineari.

Introduciamo quindi il problema del pull-back: data una forma differenziale F su Ω e un diffeomorfismo $g \colon \Omega' \to \Omega$, vorremmo poter definire una forma differenziale $\tilde{F}$ su Ω' tale che, per ogni curva γ su Ω' valga

$$\int_\gamma \tilde{F} = \int_{g \circ \gamma} F.$$

Definizione 5.7 – Pull-back

Siano Ω, Ω' due aperti di $\mathbb{R}^n$ e sia $g \colon \Omega' \to \Omega$ un diffeomorfismo. Presa una forma differenziale F su Ω, si definisce il *pull-back* di F come

$$\tilde{F} \colon \Omega' \to (\mathbb{R}^n)^*, \tilde{F}(x) = F(g(x))g'(x).$$

Teorema 5.8 – Invarianza dell'integrale tramite pull-back

Siano Ω, Ω' due aperti di R^n e sia $g \colon \Omega' \to \Omega$ un diffeomorfismo. Sia $F \colon \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma linare e sia $\tilde{F} \colon \Omega' \to (\mathbb{R}^n)^*$ il suo pull-back. Allora

$$\int_{g \circ \gamma} F = \int_\gamma \tilde{F},$$

per ogni curva γ su Ω' di classe C^1.

Dimostrazione. Sia $\gamma \colon [a, b] \to \Omega'$ una curva di classe C^1. Avremo

$$\int_{g \circ \gamma} F = \int_a^b F(g \circ \gamma(t)) \frac{d}{dt} g \circ \gamma(t)\, dt = \int_a^b F(g \circ \gamma(t)) g'|_{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t) dt.$$

Per definizione il pull-back di F è definito come $\tilde{F}(x) = F(g(x))g'(x)$. Quindi

$$\int_a^b F(g \circ \gamma(t)) g'|_{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b \tilde{F}(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_\gamma \tilde{F}. \qquad \square$$

Osservazione. Se F è una forma differenziale esatta, $F = dV$, allora $\tilde{F} = d\tilde{V}$ con $\tilde{V} = V \circ g$. Infatti

$$d\tilde{V} = dV|_{g(x)} g'(x) = F(g(x))g'(x) = \tilde{F}(x).$$

Esempio. Consideriamo nuovamente l'esempio del paragrafo precedente. Sia g il diffeomorfismo delle coordinate polari definito al di fuori dell'asse positiva delle x:

$$g \colon (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x, 0) \mid x \geqslant 0 \}, \begin{pmatrix} \rho \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \rho \cos\vartheta \\ \rho \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che la forma differenziale era definita come

$$F\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{\,(x,0) \mid x \geqslant 0\,\} \to (\mathbb{R}^2)^*, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Per definizione il pull-back di F tramite g sarà:

$$\begin{aligned}\tilde{F}\begin{pmatrix} \rho \\ \vartheta \end{pmatrix} &= F\begin{pmatrix} \rho\cos\vartheta \\ \rho\sin\vartheta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{\rho}\sin\vartheta, \frac{1}{\rho}\cos\vartheta\right)\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{pmatrix} \\ &= (0,1) = d\vartheta,\end{aligned}$$

che è quindi una forma differenziale esatta.

5.3 FORME CHIUSE

Definizione 5.9 – Forma differenziale chiusa

Sia F una forma differenziale di classe C^1. F si definisce *chiusa* se ha le derivate miste uguali, ovvero

$$\partial_j F_i(x) = \partial_i F_j(x), \ \forall\, i,j.$$

Osservazione. Se $F = V'$ con $V \in C^2$ allora F è chiusa. Infatti avremo

$$F(x) = F_1(x)\,dx_1 + \ldots + F_n(x)\,dx_n = \partial_1 V(x)\,dx_1 + \ldots + \partial_n V(x).$$

Ma $V \in C^2(\Omega)$, quindi per il lemma di Schwarz

$$\partial_j F_i(x) = \partial_i F_j(x).$$

Osservazione. In generale il viceversa è falso, infatti

$$F\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy,$$

ha $\partial_y F_x = \partial_x F_y$ ma abbiamo già osservato che su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è esatta.

Teorema 5.10 – Caratterizzazione delle forme esatte

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $F\colon \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale. Allora le proprietà seguenti si equivalgono:

1. F è una forma esatta.
2. Per ogni curva chiusa γ in Ω si ha $\displaystyle\int_\gamma F = 0$.
3. Se γ_1 e γ_2 sono curve in Ω aventi gli stessi estremi, si ha $\displaystyle\int_{\gamma_1} F = \int_{\gamma_2} F$.

Dimostrazione. Supponiamo che F sia esatta, trovo quindi $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ tale che $F = V'$. $1) \implies 2)$

Quindi
$$\int_\gamma F = V\big(\gamma(b)\big) - V\big(\gamma(a)\big),$$
dove $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ è una curva di classe C^1 con $\gamma(b) = \gamma(a)$ in quanto chiusa. Per cui
$$V\big(\gamma(b)\big) - V\big(\gamma(a)\big) = 0.$$

$2) \implies 3)$ Supponiamo che $\gamma_1\colon [a,b] \to \Omega$ e $\gamma_2\colon [c,d] \to \Omega$ siano curve di classe C^1 con
$$\gamma_1(a) = \gamma_2(c) \qquad \text{e} \qquad \gamma_1(b) = \gamma_2(d).$$
Ora $\gamma_1 - \gamma_2$ sarà la curva che percorre prima γ_1 e poi γ_2 in senso opposto. In particolare il punto iniziale di $\gamma_1 - \gamma_2$ sarà $\gamma_1(a)$ mentre il punto finale $\gamma_2(c)$, che per ipotesi coincidono. Quindi $\gamma_1 - \gamma_2$ è una curva chiusa, per cui
$$0 = \int_{\gamma_1-\gamma_2} F = \int_{\gamma_1} F - \int_{\gamma_2} F.$$

$3) \implies 1)$ Per dimostrare che F è una forma esatta devo esibirne una primitiva. Fisso $x_0 \in \Omega$ e definisco
$$V(x) = \int_\gamma F,$$
sappiamo per ipotesi che l'integrale dipende solo dagli estremi della curva

dove γ è una qualunque curva tale che parte da x_0 e arriva in x. Vogliamo dimostrare che $V' = F$. Per farlo mi basta verificare che $\partial_{x_1} V = F_1, \dots, \partial_{x_n} V = F_n$; in tal caso V è differenziabile per il teorema del differenziale totale in quanto F è continua. Devo calcolare
$$\frac{V(x + t\, e_i) - V(x)}{t}.$$
Sia $\gamma_1\colon [0,1] \to \Omega, s \mapsto x + t\, s\, e_i$. Quindi
$$\begin{aligned}
\frac{V(x + t\, e_i) - V(x)}{t} &= \frac{1}{t}\left[\int_{\gamma+\gamma_1} F - \int_\gamma F\right] = \frac{1}{t}\int_{\gamma_1} F \\
&= \frac{1}{t}\int_0^1 \Big(F_1\big(\gamma_1(s)\big), \dots, F_n\big(\gamma_1(s)\big)\Big) t \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ds \\
&= \int_0^1 F_i\big(\gamma_1(s)\big)\, ds \xrightarrow{t\to 0} F_i(x),
\end{aligned}$$
dove il limite sotto integrale è rigoroso in quanto F è continua e $[0,1]$ è un compatto. □

Esempio. Consideriamo nuovamente la forma differenziale
$$F\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \left(\mathbb{R}^2\right)^*, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy.$$
Tale forma su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è esatta infatti abbiamo mostrato in precedenza che, sulla curva parametrica della circonferenza, l'integrale non è nullo. D'altronde su $\mathbb{R}^2 \setminus \{\, (x,0) \mid x \geqslant 0 \,\}$ lo è, infatti abbiamo precedentemente mostrato che ha $d\vartheta$ come primitiva.
Questo accade in quanto $\vartheta\colon S^1 \to \mathbb{R}$ non è ben definita su tutta S^1, infatti $\vartheta(0) = \vartheta(2\pi)$.

Teorema 5.11 – Lemma di Poincaré

Sia $F\colon B_r(x_0) \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale di classe C^1. Allora F è chiusa se e soltanto se F è esatta.

Dimostrazione. Abbiamo già osservato, definendo le curve chiuse, che se una forma esatta, è automaticamente chiusa per il lemma di Schwarz. $\Leftarrow)$

Dimostriamolo che esiste una primitiva di F per $n = 2$, il caso generale è del tutto analogo. Definisco $\Rightarrow)$

$$V(x,y) = \int_{\gamma_x + \gamma_{(x,y)}} F,$$

dove

$$\gamma_x\colon [0, x - x_0] \to B_r\big((x_0,y_0)\big), t \mapsto (x_0 + t, y_0)$$

e

$$\gamma_{(x,y)}\colon [0, y - y_0] \to B_r\big((x_0,y_0)\big), t \mapsto (x, y_0 + t).$$

Supponiamo che $F(x,y) = F_x\,dx + F_y\,dy$. Quindi

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_x + \gamma_{(x,y)}} F &= \int_0^{x-x_0} \big(F_x(x_0+t,y_0), F_y(x_0+t,y_0)\big)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} dt \\
&\quad + \int_0^{y-y_0} \big(F_x(x,y_0+t), F_y(x,y_0+t)\big)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{x-x_0} F_x(x_0+t,y_0)\,dt + \int_0^{y-y_0} F_y(x,y_0+t)\,dt.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\partial_y V(x,y) = F_y(x,y),$$

per il TFC. Mentre

$$\begin{aligned}
\partial_x V(x,y) &= F_x(x,y_0) + \int_0^{y-y_0} \partial_x F_y(x,y_0+t)\,dt \\
&= F_x(x,y_0) + \int_0^{y-y_0} \partial_y F_x(x,y_0+t)\,dt \\
&= F_x(x,y_0) + \int_0^{y-y_0} \frac{d}{dt} F_x(x,y_0+t)\,dt \\
&= F_x(x,y_0) + F_x(x,y_0+t)|_0^{y-y_0} \\
&= F_x(x,y_0) + F_x(x,y) - F_x(x,y_0) \\
&= F_x(x,y),
\end{aligned}$$

F è chiusa quindi posso scambiare la derivata

dove la derivata sotto integrale è rigorosa in quanto F è di classe C^1 e $[0, y - y_0]$ è compatto. □

Osservazione. Se F è definita su un aperto semplicemente connesso allora F è esatta su tutto l'aperto.

Esempio. Calcoliamo l'integrale di $w = x\,dy$ su

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} x_0 + R\cos t \\ x_0 + R\sin t \end{pmatrix}.$$

Per definizione

$$\begin{aligned}\int_\gamma w &= \int_0^{2\pi} (x_0 + R\cos t) R\cos t \, dt \\ &= x_0 R \int_0^{2\pi} \cos t \, dt + R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt \\ &= \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} 1 + \cos 2t \, dt = R^2 \pi.\end{aligned}$$

Quindi w non è esatta. D'altronde non è chiusa, infatti

$$w = 0 \, dx + x \, dy \qquad \text{e} \qquad \partial_y 0 = 0 \neq \partial_x x = 1.$$

5.4 TEOREMA DI STOKES

Sappiamo che se $\omega = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$ è una forma differenziale chiusa e γ è una curva chiusa, allora

$$\int_\gamma \omega = 0.$$

Ora se γ è il bordo di un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ posso scrivere

$$0 = \int_\gamma \omega = \int_A \left[\partial_x b(x,y) - \partial_y a(x,y)\right] dx\,dy.$$

Questo è un fatto generale che può essere formalizzato attraverso il teorema di Gauss-Green che è un'applicazione del teorema di Stokes in $\mathbb{R}^2$.

Teorema 5.12 – di Gauss-Green

Sia $\omega = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$ una forma differenziale di classe C^1 nell'aperto $B \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $A \subseteq B$ un aperto con $\overline{A} \subseteq B$. Supponiamo che la frontiera di A sia costituita da un numero finito di curve regolari chiuse e disgiunte $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Supponiamo inoltre che tali curve siano orientate in modo da lasciarsi A alla propria sinistra. Allora

$$\iint_A \left[\partial_x b(x,y) - \partial_y a(x,y)\right] dx\,dy = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \omega = \int_{\gamma_1 + \ldots + \gamma_n} \omega = \int_{\partial A} \omega.$$

Dimostrazione. Mostriamo il caso in cui $\Gamma = \partial A$ è una curva singola e A è normale rispetto a entrambi gli assi, ovvero

$$\begin{aligned}A &= \{\,(x,y) \mid \alpha \leqslant x \leqslant \beta,\, g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\,\} \\ &= \{\,(x,y) \mid \gamma \leqslant y \leqslant \delta,\, f_1(y) \leqslant x \leqslant f_2(y)\,\}\end{aligned}$$

Adesso procediamo con il calcolo degli integrali e verifichiamo che coincidano:

$$\begin{aligned}&\iint_A \left[\partial_x b(x,y) - \partial_y a(x,y)\right] dx\,dy \\ &\qquad = \int_\gamma^\delta dy \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} \partial_x b(x,y)\,dx - \int_\alpha^\beta dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \partial_y a(x,y)\,dy,\end{aligned}$$

applico il teorema fondamentale del calcolo

$$\int_{\gamma}^{\delta}\Big[b\big(f_2(y),y\big)-b\big(f_1(y),y\big)\Big]\,dy-\int_{\alpha}^{\beta}\Big[a\big(x,g_2(x)\big)-a\big(x,g_1(x)\big)\Big]\,dx.$$

Calcoliamo ora l'integrale lungo Γ:

$$\int_{\Gamma}\omega=\int_{\Gamma}a\,dx+\int_{\Gamma}b\,dy.$$

Osserviamo che nel caso di a posso sfruttare la scrittura come dominio normale di A rispetto alle x per parametrizzare Γ come due curve Γ_1 e Γ_2 che rappresentino rispettivamente il grafico di $g_1(x)$ e di $g_2(x)$. Definisco quindi

$$\Gamma_1\colon[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2, x\mapsto\big(x,g_2(x)\big)\qquad\text{e}\qquad\Gamma_2\colon[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2, x\mapsto\big(x,g_1(x)\big),$$

da cui

$$\int_{\Gamma}a\,dx=\int_{\Gamma_2-\Gamma_1}a\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}a\big(x,g_1(x)\big)\,dx-\int_{\alpha}^{\beta}a\big(x,g_2(x)\big)\,dx,$$

dove il segno meno tiene conto dell'inversione di orientamento rispetto alla parametrizzazione per mantenere A sulla sinistra di Γ_1.
Analogamente si può procedere su b tramite la scrittura come dominio normale di A rispetto alle y. Definisco quindi

$$\Gamma_3\colon y\mapsto\big(f_2(y),y\big)\qquad\text{e}\qquad\Gamma_4\colon y\mapsto\big(f_1(y),y\big),$$

da cui

$$\int_{\Gamma}b\,dy=\int_{\Gamma_3-\Gamma_4}b\,dy=\int_{\gamma}^{\delta}b\big(f_2(y),y\big)\,dy-\int_{\gamma}^{\delta}b\big(f_1(y),y\big)\,dy.$$

Ovvero

$$\int_{\Gamma}\omega=\int_{\gamma}^{\delta}\Big[b\big(f_2(y),y\big)-b\big(f_1(y),y\big)\Big]\,dy-\int_{\alpha}^{\beta}\Big[a\big(x,g_2(x)\big)-a\big(x,g_1(x)\big)\Big]\,dx,$$

che coincide con l'espressione che abbiamo trovato in precedenza. □

Osservazione. Le figure forniscono una rappresentazione visiva dei domini e delle curve usate nel teorema.

Esempio. Cerchiamo la relazione tra area del cerchio e lunghezza della circonferenza. Consideriamo quindi la circonferenza parametrica

$$\gamma\colon[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2, t\mapsto\begin{pmatrix}R\cos t\\ R\sin t\end{pmatrix},$$

e la forma differenziale $\omega(x,y)=\frac{1}{2}(-y\,dx+x\,dy)$.
Vorremmo calcolare la superficie di $A=\left\{\,(x,y)\;\middle|\;x^2+y^2\leqslant R^2\,\right\}$. Osserviamo che

$$\iint_A(\partial_x b-\partial_y a)\,dx\,dy=\iint_A dx\,dy=|A|=\pi R^2.$$

Ma per il teorema di Stokes

$$\iint_A(\partial_x b-\partial_y a)\,dx\,dy=\int_{\gamma}\omega,$$

dove per definizione

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(-R\sin t, R\cos t)\begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R^2 \, dt = \pi R^2.$$

Esempio. Calcoliamo l'area del nefroide parametrico

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} a(3\cos t - \cos 3t) \\ a(3\sin t - \sin 3t) \end{pmatrix}, a > 0.$$

Trovare l'espressione del dominio normale sembra piuttosto complicato, usiamo quindi il teorema di Stokes. Consideriamo la forma differenziale

$$\omega(x, y) = x \, dy,$$

che osserviamo essere una forma d'area su $\mathbb{R}^2$ in quanto

$$\iint_A (\partial_x x - \partial_y 0) \, dx \, dy = \iint_A dx \, dy = |A|.$$

quindi per Stokes

$$|A| = \iint_A dx \, dy = \int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} (0, a(3\cos t - \cos 3t)) \begin{pmatrix} \cdots \\ a(3\cos t - 3\cos 3t) \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} 3a^2(3\cos t - \cos 3t)(\cos t - \cos 3t) \, dt$$
$$= 3a^2 \int_0^{2\pi} 3\cos^2 t - 4\cos t \cos 3t + \cos^2 3t \, dt$$
$$= 3a^2[3\pi + \pi] = 12a^2\pi,$$

dove il termine $4\cos t \cos 3t$ si annulla con le formule di prostaferesi, mentre gli altri due termini si calcolano facilmente ricordando che

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t + \sin^2 t \, dt = 2\pi.$$

5.5 2-FORME

Definizione 5.13 – 2-forma

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Una 2-forma su Ω si definisce come

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1, i_2 \leqslant n} a_{i_1, i_2}(x) \, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2},$$

con $a\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ è una funzione differenziabile e $\wedge$ indica il prodotto wedge.

Osservazione. Noi lavoreremo sempre su $n = 2$, in tal caso una 2-forma può essere scritta esplicitamente come

$$\omega = a(x, y) \, dx \wedge dy,$$

dove $a\colon \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è aperto.

Definizione 5.14 – Integrale di una 2-forma su una superficie

Sia $\omega = a(x,y)\,dx \wedge dy$ una 2-forma e sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Definiamo l'integrale di ω su Ω come

$$\int_\Omega a\,dx \wedge dy = \int_\Omega a(x,y)\,dx\,dy.$$

Proprietà 5.15. Il prodotto wedge è antisimmetrico, ovvero

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx.$$

Proprietà 5.16. Il prodotto wedge in se stesso è nullo, ovvero

$$dx \wedge dx = 0.$$

Definizione 5.17 – Pull-back di una 2-forma

Siano Ω, Ω' due aperti di $\mathbb{R}^2$ e sia $\varphi\colon \Omega' \to \Omega$ un diffeomorfismo. Presa una 2-forma $a(x,y)\,dx \wedge dy$ su Ω, il suo pull-back su Ω' è definito come

$$\tilde{a}(u,v)\,du \wedge dv = a\big(x(u,v), y(u,v)\big)\,dx(u,v) \wedge dy(u,v).$$

Osservazione. Con $x(u,v)$ e $y(u,v)$ indichiamo rispettivamente le controimmagini di x, y rispetto a φ.

Teorema 5.18 – Invarianza dell'integrale di 2-forme tramite pull-back

Siano Ω, Ω' due aperti di $\mathbb{R}^2$ e sia $\varphi\colon \Omega' \to \Omega$ un diffeomorfismo. Sia $a(x,y)\,dx \wedge dy$ una 2-forma e sia $\tilde{a}$ il suo pull-back. Allora

$$\int_{\Omega'} \tilde{a} = \int_\Omega a.$$

Dimostrazione. Per definizione

$$\tilde{a}(u,v)\,du \wedge dv = a\big(x(u,v), y(u,v)\big)\,dx(u,v) \wedge dy(u,v),$$

dove $dx(u,v)$ e $dy(u,v)$ sono 1-forme che posso sviluppare rispetto alle derivate parziali, ovvero

$$dx(u,v) \wedge dy(u,v) = \big[\partial_u x(u,v)\,du + \partial_v x(u,v)\,dv\big] \wedge \big[\partial_u y(u,v)\,du + \partial_v y(u,v)\,dv\big],$$

da cui, ricordando le proprietà del prodotto wedge

$$\begin{aligned} dx(u,v) \wedge dy(u,v) &= \partial_u x(u,v)\partial_v y(u,v)\,du \wedge dv + \partial_v x(u,v)\partial_u y(u,v) dv \wedge du \\ &= \big[\partial_u x(u,v)\partial_v y(u,v) - \partial_v x(u,v)\partial_u y(u,v)\big] du \wedge dv \\ &= \det \varphi'\,du \wedge dv. \end{aligned}$$

Quindi
$$\tilde{a}(u,v)du \wedge dv = a\big(x(u,v), y(u,v)\big) \det \varphi' \, du \wedge dv.$$
Da cui segue, per il cambio di variabile,
$$\begin{aligned}\int_{\Omega} a(x,y)\,dx \wedge dy = \int_{\Omega} a(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Omega'} a\big(x(u,v), y(u,v)\big) \det \varphi' \, du\,dv \\ = \int_{\Omega'} \tilde{a}(u,v)\,du\,dv = \int_{\Omega'} \tilde{a}(u,v)\,du \wedge dv.\end{aligned}$$
□

Esempio. Consideriamo la trasformazione delle coordinate polari
$$\varphi\colon (0,+\infty) \times S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, (\rho,\vartheta) \mapsto \begin{pmatrix} \rho\cos\vartheta \\ \rho\sin\vartheta \end{pmatrix}.$$
Vorremmo calcolare l'integrale su $A \subseteq \mathbb{R}^2$ di una 2-forma $a(x,y)\,dx \wedge dy$
$$\iint_A a(x,y)\,dx \wedge dy = \iint_A a(x,y)\,dx\,dy.$$
Tramite pull-back avremo
$$\begin{aligned}\iint_A a &= \iint_{\varphi^{-1}(A)} a(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)\big[\cos\vartheta\,d\rho - \rho\sin\vartheta\,d\vartheta\big] \wedge \big[\sin\vartheta\,d\rho + \rho\cos\vartheta\,d\vartheta\big] \\ &= \iint_{\varphi^{-1}(A)} a(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)[\rho\cos^2\vartheta + \rho\sin^2\vartheta]\,d\rho \wedge d\vartheta \\ &= \iint_{\varphi^{-1}(A)} a(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)\rho\,d\rho \wedge d\vartheta \\ &= \iint_{\varphi^{-1}(A)} a(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)\rho\,d\rho\,d\vartheta,\end{aligned}$$
che corrisponde proprio al cambio di variabile.

Definizione 5.19 – Derivata esterna di una 1-forma

La derivata di una 1-forma è una 2-forma, che si definisce *derivata esterna*. In particolare se $\omega = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$ è una 1-forma avremo che
$$d\omega = (\partial_x b - \partial_y a)\,dx \wedge dy.$$

Osservazione. La definizione segue da
$$\begin{aligned}d\omega &= da(x,y) \wedge dx + db(x,y) \wedge dy \\ &= (\partial_x a\,dx + \partial_y a\,dy) \wedge dx + (\partial_x b\,dx + \partial_y b\,dy) \wedge dy \\ &= \partial_y a\,dy \wedge dx + \partial_x b\,dx \wedge dy \\ &= (\partial_x b - \partial_y a)\,dx \wedge dy.\end{aligned}$$

Teorema 5.20 – Teorema di Stokes

Sia $\omega = a(x, y)\,dx + b(x, y)\,dy$ una forma differenziale di classe C^1 nell'aperto $B \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $A \subseteq B$ un aperto con $\overline{A} \subseteq B$. Allora

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega.$$

Dimostrazione. Segue dal teorema di Gauss-Green e dalla definizione precedente sulla derivata esterna. □

Esempio. Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$ contenente l'origine, la cui frontiera è una curva chiusa γ orientata in modo da tenere A a sinistra. Allora

$$\int_\gamma \omega = 2\pi, \qquad \text{con } \omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Infatti se A è aperto, per r piccolo $\overline{B_r(0)} \subseteq A$. Chiamo

$$\gamma_1 \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$$

Definiamo $A' = A \setminus B_r(0)$, quindi $\partial A' = \gamma - \gamma_1$. Applicando Stokes

$$\int_{\gamma-\gamma_1} \omega = \int_{\partial A'} \omega = \int_{A'} d\omega.$$

Ora ω è chiusa, quindi in generale se $\omega = a\,dx + b\,dy$ si ha $\partial_x b = \partial_y a$, da cui

$$d\omega = [\partial_x b - \partial_y a]\,dx \wedge dy = 0.$$

Pertanto nel nostro caso

$$0 = \int_{A'} d\omega = \int_{\gamma-\gamma_1} \omega \iff \int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega = 2\pi,$$

in quanto γ_1 è la circonferenza è abbiamo già calcolato l'integrale di ω lungo la circonferenza.

Esempio. Calcoliamo l'area della superficie A all'interno del deltoide parametrico

$$\gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} x = a(2\cos t + \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{pmatrix}$$

Consideriamo la forma $\omega = x\,dy$ che è una forma d'area di $\mathbb{R}^2$ in quanto $d\omega = dx \wedge dy$.

Quindi, applicando Stokes,

$$\begin{aligned}
|A| &= \int_A dx\,dy = \int_A dx \wedge dy = \int_A dw \\
&= \int_{\partial A} \omega = \int_0^{2\pi} (0, 2a\cos t + a\cos 2t) \begin{pmatrix} \cdots \\ 2a\cos t + 2a\sin 2t \end{pmatrix} dt \\
&= 2a^2 \int_0^{2\pi} (2\cos t + \cos 2t)(\cos t - \cos 2t)\,dt \\
&= 2a^2 \int_0^{2\pi} 2\cos^2 t - \cos t \cos 2t - \cos^2 2t\,dt \\
&= 2a^2\pi.
\end{aligned}$$

5.6 TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Definizione 5.21 – Versore normale ad una curva

Sia $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare di classe C^1. Definiamo il versore normale a γ come

$$n(t) = J\frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|}, \qquad \text{dove } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

è la matrice della rotazione di $\pi/2$.

ovvero tale da mantenere la superficie che contiene alla sua sinistra

Osservazione. Se γ è percorso in senso antiorario allora la normale è diretta all'esterno.

Esempio. Consideriamo la circonferenza parametrica

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$$

Il suo versore normale sarà

$$n(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix} \frac{1}{R} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Definizione 5.22 – Flusso attraverso una curva

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto e sia $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ una curva regolare. Sia $V\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale. Il *flusso* di V attraverso γ si definisce come

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \langle n, V\rangle\,ds &= \int_a^b \langle J\frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|}, V(\gamma(t))\rangle\,\|\dot\gamma(t)\|\,dt \\
&= \int_a^b \langle J\,\dot\gamma(t), V(\gamma(t))\rangle\,dt.
\end{aligned}$$

Notazione. Un campo vettoriale $V\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ è una mappa continua.

Esempio. Calcoliamo il flusso di

$$V(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{lungo} \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Per definizione

$$\int_\gamma \langle J\,\dot\gamma(t), V(\gamma(t))\rangle \, dt = \int_0^{2\pi} \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \rangle \, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Definizione 5.23 – Divergenza del campo vettoriale

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto e sia V un campo vettoriale su Ω. Si definisce *divergenza* di V come la somma delle derivate parziali delle componenti di V lungo gli assi, ovvero

$$\operatorname{div} V(x,y) = \partial_x V_x + \partial_y V_y, \qquad \text{con } V(x,y) = \begin{pmatrix} V_x(x,y) \\ V_y(x,y) \end{pmatrix}$$

Teorema 5.24 – della Divergenza

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto il cui bordo $\partial A = \gamma$ è una curva regolare percorsa in senso antiorario, $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$. Sia $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe C^1. Allora

$$\int_\gamma \langle n, V\rangle \, ds = \iint_A \operatorname{div} V(x,y)\, dx\, dy.$$

Dimostrazione. Definiamo una forma differenziale associata a V:

$$\omega = {}^tV(x,y)J \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = (V_x, V_y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = -V_y\, dx + V_x\, dy.$$

Applico Stokes a ω:

$$\int_A d\omega = \int_\gamma \omega = \int_a^b \big(-V_y(\gamma(t)), V_x(\gamma(t))\big) \begin{pmatrix} \dot\gamma_x(t) \\ \dot\gamma_y(t) \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_a^b \big(V_x(\gamma(t)), V_y(\gamma(t))\big) J \begin{pmatrix} \dot\gamma_x(t) \\ \dot\gamma_y(t) \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), n(t)\rangle \, \|\dot\gamma(t)\|\, dt$$
$$= \int_a^b \langle V, n\rangle \, ds,$$

moltiplico e divido per $\|\dot\gamma(t)\|$

che corrisponde al flusso di V attraverso γ. Mi basta quindi mostrare che

$$\int_A d\omega = \iint_A \operatorname{div} V(x,y)\, dx\, dy.$$

Sappiamo che $\omega = V_x\, dy - V_y\, dx$, da cui

$$d\omega = (\partial_x V_x\, dx + \partial_y V_x\, dy) \wedge dy - (\partial_x V_y\, dx + \partial_y V_y\, dy) \wedge dx$$
$$= (\partial_x V_x + \partial_y V_y)\, dx \wedge dy.$$

Quindi, per definizione,

$$\int_{A} d\omega = \iint_A (\partial_x V_x + \partial_y V_y)\,dx\,dy = \iint_A \operatorname{div} V(x,y)\,dx\,dy. \qquad \square$$

Esempio. Sappiamo che una circonferenza di raggio R ha area πR^2 e perimentro $2\pi R$. In particolare vale

$$\text{area } = \frac{1}{4}\text{ diametro} \cdot \text{perimetro}.$$

Mostriamo che in generale questa è una disuguaglianza (di Didone) che vale per ogni curva.
Sia A aperto, $\partial A = \gamma$ e sia $A \subseteq B_R(0)$, vogliamo mostrare

$$|A| \leqslant \frac{1}{4} L(\gamma) 2R.$$

Definiamo

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{div} V = 1.$$

Applicando il teorema della divergenza avremo

disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |A| &= \iint_{A} dx\,dy = \iint_{A} \underbrace{\operatorname{div} V(x,y)}_{=1}\,dx\,dy \overset{\text{teor}}{=} \int_{\gamma} \langle V, n\rangle\,ds \\ &= \int_{\gamma} \langle V\big(\gamma(t)\big), J\frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|}\rangle\,\|\dot\gamma(t)\|\,dt \\ &\leqslant \int_{\gamma} \big\|V\big(\gamma(t)\big)\big\|\|n\|\|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_{\gamma} \frac{R}{2}\,ds \\ &= \frac{R}{2} L(\gamma) = \frac{1}{4} L(\gamma)\operatorname{diam}(A), \end{aligned}$$

dove $\|n\| = 1$ in quanto versore, mentre

$$\big\|V\big(\gamma(t)\big)\big\| = \sqrt{\frac{R^2\cos^2 t}{4} + \frac{R^2\sin^2 t}{4}} = \frac{R}{2}.$$

Osservazione. Il flusso non dipende dalla geometria ma dalla carica che vi è all'interno.

5.7 APPENDICE

Nei paragrafi precedenti abbiamo osservato che una forma esatta è sempre chiusa ma, in generale, il viceversa è falso. In questo paragrafo vorremmo capire quanto la nozione di forma chiusa è vicina a quella di forma esatta.

Fissato un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, possiamo considerare l'insieme delle forme chiuse di Ω come uno spazio vettoriale, mentre quello delle forme esatte come un sottospazio di quest'ultimo. Quozientando i due spazi, otterremmo un insieme del tipo

$$\frac{\text{Forme chiuse}}{\text{Forme esatte}} = \{\, \omega + dS \mid dS \text{ forma esatta} \,\}.$$

Quindi $\omega_1 \sim \omega_2 \iff \omega_1 - \omega_2 = dS$ per qualche S.

Definizione 5.25 – Spazio quoziente delle forme chiuse

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Lo spazio quoziente delle forme chiuse in Ω rispetto alle forme esatte si denota come

$$H^1(\Omega) = \{\, \omega + dS \mid dS \text{ forma esatta} \,\}.$$

Osservazione. La cardinalità di questo insieme ci fornisce un'indicazione su quanto le forme chiuse siano esatte su Ω. Ovviamente i due spazio coincidono quando $H^1(\Omega) = \{\bar{0}\}$.

Proposizione 5.26 – Forma differenziale periodica in $\mathbb{R}^2$

Sia $\omega\colon \mathbb{R}^2 \to \left(\mathbb{R}^2\right)^*$ una forma differenziale periodica, di classe C^1 e chiusa su $\mathbb{R}^2$. Allora esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e $S \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ periodica tali che

$$\omega = c_1\,dx + c_2\,dy + dS.$$

Dimostrazione. Con forma differenziale periodica indichiamo ω tale che

$$\omega(x + k_1, y + k_2) = \omega(x, y) \qquad \text{se } (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2.$$

Sia $\tilde{S}$ una primitiva di ω, la cui esistenza è garantita localmente dal lemma di Poincaré. Possiamo ad esempio considerare $\tilde{S}(x, y)$ come il lavoro compiuto da ω per andare da $(0, 0)$ a (x, y).
Trovo quindi $c_1 \in \mathbb{R}$ tale che $S(x, 0) = \tilde{S}(x, 0) - c_1 x$ è periodica sull'asse x. Ovvero $S(x+1, 0) = S(x, 0)$. Infatti se scelgo come cammino compiuto da $\tilde{S}$ un segmento sull'asse delle x, è chiaro che

$$\tilde{S}(x + 1, 0) - \tilde{S}(x, 0) = \int_\gamma \omega, \qquad \text{con } \omega\colon [x, x + 1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, 0).$$

D'altronde la periodicità di ω ci dice che il lavoro compiuto da ω per andare da $(x, 0)$ a $(x + 1, 0)$ è lo stesso da $(0, 0)$ a $(1, 0)$, il quale è per definizione $\tilde{S}(1, 0)$.
A questo punto è sufficiente porre $c_1 = \tilde{S}(1, 0)$ per ottenere

$$\begin{aligned} S(x + 1, 0) - S(x, 0) &= \tilde{S}(x + 1, 0) - c_1(x + 1) - \tilde{S}(x, 0) + c_1 x = \tilde{S}(x + 1, 0) - \tilde{S}(x, 0) - c_1 \\ &= \tilde{S}(1, 0) - c_1 = \tilde{S}(1, 0) - \tilde{S}(1, 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Per ottenere la periodicità anche rispetto ad y poniamo

$$S(x, y) = \tilde{S}(x, y) - c_1 x - c_2 y,$$

dove $c_2 = \tilde{S}(0, 1)$, ovvero il lavoro di ω da $(0, 0)$ a $(0, 1)$. Chiaramente avremo

$$S(0, y + 1) = S(0, y).$$

Avremo quindi che $S(k_1, k_2) = S(0, 0)$ se $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$. Infatti se consideriamo il cammino che percorre l'asse y da $(0, 0)$ a $(0, k_2)$ per poi spostarsi lungo l'asse x fino a (k_1, k_2), appare chiaro che per periodicità il lavoro è nullo:

$$S(k_1, k_2) - S(0, 0) = \left[S(k_1, k_2) - S(0, k_2)\right] + \left[S(0, k_2) - S(0, 0)\right] = 0,$$

dove la prima somma è nulla per la periodicità sull'asse x, mentre la seconda lo è per la periodicità sull'asse y.
Abbiamo quindi ottenuto che $\tilde{S}(x, y) = c_1 x + c_2 y + S(x, y)$, con S periodico. D'altronde per ipotesi $d\tilde{S} = \omega$, da cui

$$\omega = c_1 dx + c_2 dy + dS.$$

□

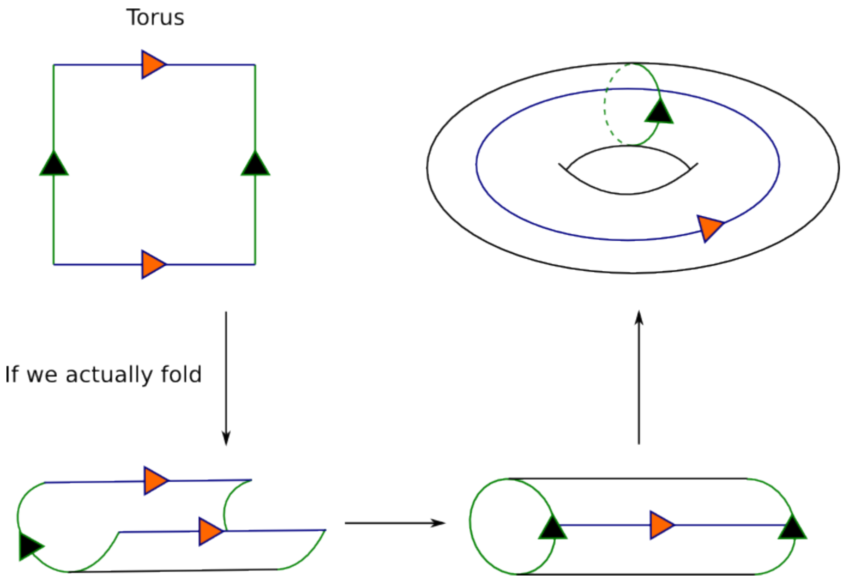

Figura 5.1: La costruzione del toro bidimensionale tramite quoziente.

Esempio. Dimostriamo che $H^1(T^2) \simeq \mathbb{R}^2$, dove T^2 è il toro bidimensionale. Sappiamo che

$$T^2 = \frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2}, \qquad \text{con } (x,y) \sim (\tilde{x},\tilde{y}) \iff (x-\tilde{x}, y-\tilde{y}) \in \mathbb{Z}^2.$$

Per cui $H^1(T^2) \simeq H^1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$. Quindi al posto delle forme su T^2 possiamo considerare le forme periodiche su $\mathbb{R}^2$.
Per la proposizione precedente sappiamo che se ω è una forma chiusa periodica su $\mathbb{R}^2$, allora

$$\omega = c_1 dx + c_2 dy + dS, \qquad \text{con } S \text{ periodica.}$$

Dal momento che S è periodica, quozientando con le forme esatte periodiche dS viene inglobata nel quoziente. A questo punto considero

$$\varphi \colon H^1\left(\frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2}\right) \to \mathbb{R}^2, \omega = c_1 dx + c_2 dy + dS \mapsto (c_1, c_2),$$

la quale si mostra essere lineare, iniettiva e suriettiva. Quindi

$$H^1(T^2) \simeq H^1\left(\frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2}\right) \simeq \mathbb{R}^2.$$

6 SUPERFICI E INTEGRALI DI SUPERFICIE

6.1 CONTROESEMPIO DI SCHWARZ

Nei paragrafi precedenti abbiamo osservato come la lunghezza di una curva γ possa essere definita come l'estremo superiore della lunghezza delle spezzate, oppure, nel caso la curva sia C^1, come

$$\int_\gamma \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt.$$

In questo paragrafo ci occuperemo di studiare le aree delle superfici. Volendo fare un'analogia con le curve, ci aspettiamo che l'area di una superficie possa essere studiata sia come limite della aree di triangolazioni sempre più fini, che tramite una parametrizzazione ed una formula.

Nella prossima proposizione vedremo come la prima intuizione risulti sbagliata.

Proposizione 6.1 – Controesempio di Schwarz

Consideriamo S il cilindro di raggio r e altezza h. Supponiamo di triangolarne la superficie, allora l'area della superficie dipende dalla triangolazione.

Dimostrazione. Supponiamo di dividere S in m semicilindri di altezza $\frac{h}{m}$ ciascuno.
Per ogni semicilindro, dividiamo le circonferenze di base in n archi di lunghezza congruente in modo tale che gli estremi di ogni arco costituiscano i vertici del triangolo iscritto nella superficie laterale del semicilindro, come nella figura 6.1.
Chiaramente gli archi di due circonferenze successive saranno sfasati di un mezzo arco.
Supponiamo che $\triangle BAC$ sia uno qualsiasi dei triangoli iscritti in un semicilindro. Definiamo D e E rispettivamente come i punti medi del segmento $\overline{BC}$ e dell'arco $\overset{\frown}{BC}$.
Sia O il centro della circonferenza che contiene l'arco $\overset{\frown}{BC}$, così che $\triangle BOC$ sia parallelo alla base del cilindro. Per costruzione avremo

$$\vartheta = B\hat{O}D = \frac{\pi}{n} \qquad \text{e} \qquad |\overline{BC}| = 2r\sin\vartheta = 2r\sin\frac{\pi}{n}.$$

Per trovare l'area di $\triangle BAC$ è necessario, per prima cosa, applicare il teorema di Pitagora a $\triangle ADE$ per calcolare l'altezza $|\overline{AD}|$:

$$|\overline{DE}| = |\overline{OE}| - |\overline{OD}| = r - r\cos\vartheta = r\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right),$$

da cui

$$|\overline{AD}|^2 = |\overline{AE}|^2 + |\overline{DE}|^2 = \left(\frac{h}{m}\right)^2 + r^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2,$$

quindi

$$\begin{aligned}\operatorname{area}(\triangle BAC) &= \frac{1}{2}|\overline{BC}||\overline{AD}| = \frac{1}{2}\left(2r\sin\frac{\pi}{n}\right)\sqrt{\left(\frac{h}{m}\right)^2 + r^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}\\ &= r\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\left(\frac{h}{m}\right)^2 + r^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}.\end{aligned}$$

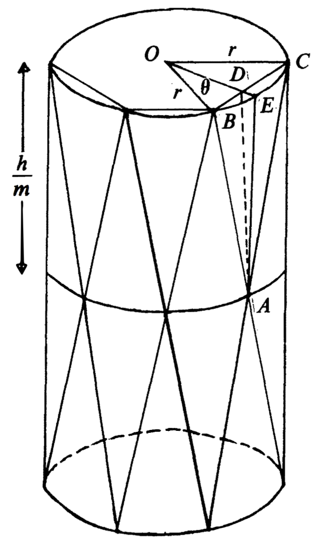

Figura 6.1: La triangolazione di un cilindro di raggio r e altezza h.

In ognuno degli m semicilindri ci sono $2n$ di questi triangoli, i quali sono tutti congruenti tra loro. In particolare la nostra triangolazione ha prodotto $2\,m\,n$ di tali triangoli. Quindi l'area di S in funzione di m e n sarà:

$$A(m,n) = 2m\,n\left(r\sin\frac{\pi}{n}\right)\sqrt{\left(\frac{h}{m}\right)^2 + r^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}.$$

Se poniamo $m = q\,n^2$ otteniamo

$$|A(m,n)| = \left|2q\,n^3\left(r\sin\frac{\pi}{n}\right)\sqrt{\frac{h^2}{q^2n^4} + r^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}\right|.$$

Ora per $n \to +\infty$ avremo

$$\sin\frac{\pi}{n} \cong \frac{\pi}{n} \qquad \text{e} \qquad 1-\cos\frac{\pi}{n} \cong \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{n^2},$$

per cui

$$|A(m,n)| \cong \left|2q\,r\,\pi\sqrt{\frac{r^2\pi^4}{4} + \frac{h^2}{q^2}}\right|.$$

Quindi l'area del cilindro dipende da q, per cui dipende dalla triangolazione. Ne segue che questo metodo non è valido. □

6.2 INTEGRALI DI SUPERFICIE

Definizione 6.2 – Superficie regolare

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso. Una *superficie regolare*, parametrizzata, di $\mathbb{R}^3$ è una mappa $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ che sia iniettiva e tale che

$$\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u} \wedge \frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v} \neq 0,\ \forall\ (u,v) \in \Omega.$$

Notazione. In questo caso la notazione del prodotto $\wedge$ rappresenta il ben noto prodotto vettoriale.

Osservazione. In altre parole, la condizione sulle derivate parziali può essere riassunta nella lineare indipendenza di

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(u,v)}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_2(u,v)}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_3(u,v)}{\partial u} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Definizione 6.3 – Integrale di una funzione lungo una superficie

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto e φ una superficie regolare su Ω. Sia $f\colon \varphi(\Omega) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. L'integrale di f lungo $\varphi(\Omega)$ si definisce come

$$\int\limits_{\varphi(\Omega)} f\, ds = \int\limits_{\Omega} f\big(\varphi(u,v)\big) \left\| \frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial v} \right\| du\, dv.$$

Esempio. Calcoliamo la superficie della sfera di raggio R. Utilizziamo la parametrizzazione canonica che ci viene suggerita dalle coordinate sferiche

$$\varphi\colon (0,\pi) \times S^1 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} \psi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} R \sin\psi \cos\vartheta \\ R \sin\psi \sin\vartheta \\ R\cos\psi \end{pmatrix}$$

Calcoliamo quindi il prodotto vettore delle derivate parziali

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\psi,\vartheta)}{\partial \psi} \wedge \frac{\partial \varphi(\psi,\vartheta)}{\partial \vartheta} &= \det \begin{pmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ R\cos\psi\cos\vartheta & R\cos\psi\sin\vartheta & -R\sin\psi \\ -R\sin\psi\sin\vartheta & R\sin\psi\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \bar{\imath}(R^2 \sin^2\psi \cos\vartheta) + \bar{\jmath}(R^2\sin^2\psi\sin\vartheta) + \bar{k}(R^2 \sin\psi\cos\psi) \\ &= R\sin\psi(R\sin\psi\cos\vartheta\,\bar{\imath} + R\sin\psi\sin\vartheta\,\bar{\jmath} + R\cos\psi\,\bar{k}) \\ &= R\sin\psi\varphi(R). \end{aligned}$$

con $\varphi(R)$ denotiamo in maniera compatta il vettore sulla sfera di raggio R

Per cui la superficie della sfera è

$$\begin{aligned} \int\limits_{\varphi(\Omega)} ds &= \int\limits_{\Omega} \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} \right\| d\psi\, d\vartheta \\ &= \int\limits_{\Omega} R^2 \sin\psi\, d\psi\, d\vartheta = R^2 \int_0^{\pi} \sin\psi\, d\psi \int_0^{2\pi} d\vartheta \\ &= 4\pi R^2. \end{aligned}$$

utilizzando le formule di riduzione

Proposizione 6.4 – Il prodotto vettore è ortogonale alla superficie

Sia $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare. Allora

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

è ortogonale alla superficie.

Dimostrazione. Possiamo riformulare la tesi dicendo che se $\gamma\colon [-1,1] \to \varphi(\Omega)$ è una curva di classe C^1 sulla superficie, si deve avere

$$\dot{\gamma}(t) \perp \left(\left.\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right|_{\gamma(t)} \wedge \left.\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right|_{\gamma(t)} \right).$$

Infatti $\dot{\gamma}(t)$ rappresenta il vettore tangente alla superficie in $\gamma(t)$.
Ora se $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ posso scrivere $\gamma = \varphi \circ \tilde{\gamma}$ dove $\tilde{\gamma}\colon [-1,1] \to \Omega$. In altre parole, prendo una curva su Ω e la mappo tramite φ sulla superficie $\varphi(\Omega)$.
Supponiamo di avere le seguenti parametrizzazioni

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \tilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

Applicando la regola della catena avremo

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= \frac{d}{dt} \varphi \circ \tilde{\gamma}(t) = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}\right|_{\tilde{\gamma}(t)} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} \\ &= \dot{u}(t) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(\gamma(t)) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(\gamma(t)) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(\gamma(t)) \end{pmatrix} + \dot{v}(t) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(\gamma(t)) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(\gamma(t)) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(\gamma(t)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

per la definizione di prodotto vettore

Ora, entrambi i vettori delle derivate parziali sono perpendicolari al prodotto vettore calcolato in $\gamma(t)$, per cui

$$\dot{\gamma}(t) \perp \left(\left.\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right|_{\gamma(t)} \wedge \left.\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right|_{\gamma(t)} \right),$$

in quanto combinazione lineare di vettori perpendicolari. □

Esempio. Calcoliamo la superficie del toro bidimensionale. Supponiamo che $R > 0$ sia la distanza del centro del tubo al centro del toro e che $r > 0$ sia il raggio del tubo. Una possibile parametrizzazione è la seguente

$$\varphi\colon S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} t \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (R + r\cos t)\cos\vartheta \\ (R + r\cos t)\sin\vartheta \\ r\sin t \end{pmatrix}$$

Troviamo il prodotto vettore

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t,\vartheta)}{\partial t} \wedge \frac{\partial \varphi(t,\vartheta)}{\partial \vartheta} &= \det \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -r\sin t\cos\vartheta & -r\sin t\sin\vartheta & r\cos t \\ -(R + r\cos t)\sin\vartheta & (R + r\cos t)\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\bar{i}\big(r(R + r\cos t)\cos t\cos\vartheta\big) - \bar{j}\big(r(R + r\cos t)\cos t\sin\vartheta\big) \\ &\quad - \bar{k}\big(r(R + r\cos t)\sin t\big) \\ &= r(R + r\cos t)[-\cos t\cos\vartheta\,\bar{i} - \cos t\sin\vartheta\,\bar{j} - \sin t\,\bar{k}]. \end{aligned}$$

Per cui la superficie del toro è

$$\int_{\varphi(\Omega)} ds = \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right\| dt\, d\vartheta$$

$$= \int_{\Omega} (R + r\cos t) r\, dt\, d\vartheta = r \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} (R + r\cos t)\, dt$$

$$= 4\pi^2 R\, r.$$

per le formule di riduzione

Esempio. Calcoliamo la superficie del cono di altezza λ. Sfruttiamo la parametrizzazione suggerita dalle coordinate cilindriche

$$\varphi\colon (0,1) \times S^1 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} \rho \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \rho\cos\vartheta \\ \rho\sin\vartheta \\ \lambda\rho \end{pmatrix}$$

Troviamo il prodotto vettore

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \det \begin{pmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \cos\vartheta & \sin\vartheta & \lambda \\ -\rho\sin\vartheta & \rho\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\bar{\imath}(\lambda\rho\cos\vartheta) - \bar{\jmath}(\lambda\rho\sin\vartheta) + \bar{k}(\rho).$$

Quindi la superficie del cilindro è

$$\int_{\varphi(\Omega)} ds = \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right\| d\rho\, d\vartheta$$

$$= \int_{\Omega} \rho\sqrt{\lambda^2 + 1}\, d\rho\, d\vartheta = \sqrt{\lambda^2+1} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \rho\, d\rho$$

$$= \pi\sqrt{\lambda^2 + 1}.$$

Esempio (Finestra di Viviani)**.** Consideriamo la seguente superficie determinata dall'intersezione di una sfera con un cilindro nel semispazio superiore,

$$F = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + y^2 \leqslant \frac{r^2}{4}, z > 0 \right\}.$$

Per il calcolo dell'area della superficie sfrutteremo le coordinate cilindriche

$$\varphi\colon (0, +\infty) \times S^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{ (0,0,z) \mid z \in \mathbb{R} \}, \begin{pmatrix} \rho \\ \vartheta \\ \lambda \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \rho\cos\vartheta \\ \rho\sin\vartheta \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Per la parametrizzazione consideriamo la proiezione sul piano xy, otteniamo le condizioni

$$0 \leqslant \rho \leqslant r\cos\vartheta \qquad \text{e} \qquad -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}.$$

Quindi una parametrizzazione della finestra di Viviani è la seguente

$$\psi\colon \left\{ (\rho, \vartheta) \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}, 0 < \rho < r\cos\vartheta \right\} \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} \rho \\ \vartheta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \rho\cos\vartheta \\ \rho\sin\vartheta \\ \sqrt{r^2 - \rho^2} \end{pmatrix}$$

Per il calcolo dell'area è quindi sufficiente trovare il prodotto vettore e calcolare l'integrale di superficie.

6.3 SIGNIFICATO DEL PRODOTTO VETTORE

Per come abbiamo definito l'integrale lungo una superficie, è lecito domandarsi perché

$$dS = \left\| \frac{\partial \psi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\|$$

In questo paragrafo forniremo una spiegazione inizialmente empirica su $\mathbb{R}^2$, per poi estenderci al caso generale tramite un teorema di indipendenza rispetto alla parametrizzazione.

Supponiamo di avere due aperti $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^2$ e una mappa ψ che manda Ω' in Ω. Tali aperti possono anche essere pensati come due superfici "piatte" in $\mathbb{R}^3$, ad esempio parametrizzandole come

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mostriamo ora che la formula dell'area delle superfici ci fornisce l'area di Ω. Calcoliamo il prodotto vettore

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial v} &= \det \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial_u x & \partial_u y & 0 \\ \partial_v x & \partial_v y & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0\bar{i} + 0\bar{j} + \bar{k}(\partial_u x \partial_v y - \partial_u y \partial_v x) \\ &= \bar{k} \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}. \end{aligned}$$

Ovvero

$$\left\| \frac{\partial \psi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|,$$

che, tramite la formula dell'integrale lungo una superficie, ci fornisce

$$|\Omega| = \int_{\Omega'} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv.$$

Quindi in $\mathbb{R}^2$ tale formula è una restrizione della definizione di area di una superficie tramite cambiamento di variabile.

La ragione per cui questo vale anche in $\mathbb{R}^3$ viene dal teorema seguente

Teorema 6.5 – Indipendenza dell'area rispetto alla parametrizzazione

Siano $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^2$ aperti e sia $\varphi \colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizzata regolare. Sia $\psi \colon \Omega' \to \Omega$ un diffeomorfismo. Allora l'area di φ coincide con quella di $\varphi \circ \psi$.

Dimostrazione. Supponiamo che Ω e Ω' abbiano rispettivamente coordinate (u,v) e (s,t). Supponiamo inoltre che $\varphi(\Omega)$ sia parametrizzato come segue

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u,v) \\ \varphi_2(u,v) \\ \varphi_3(u,v) \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il prodotto vettore di $\varphi \circ \psi$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi \circ \psi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi \circ \psi}{\partial t} &= \det \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial \varphi_1 \circ \psi}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_2 \circ \psi}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_3 \circ \psi}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi_1 \circ \psi}{\partial t} & \frac{\partial \varphi_2 \circ \psi}{\partial t} & \frac{\partial \varphi_3 \circ \psi}{\partial t} \end{pmatrix} \\
&= \bar{i} \det \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} \right] - \bar{j} \det \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} \right] \\
&+ \bar{k} \det \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} \right] \\
&= \bar{i} \det \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \end{pmatrix} \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} \right] - \bar{j} \det \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \end{pmatrix} \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} \right] \\
&+ \bar{k} \det \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \end{pmatrix} \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} \right] \\
&= \det \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \bigg|_{(u,v)=\psi(s,t)} .
\end{aligned}$$

applico lo sviluppo di Laplace e la regola della catena

per la linearità del determinante

Da cui

$$\left\| \frac{\partial \varphi \circ \psi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi \circ \psi}{\partial t} \right\| = \left| \det \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} \right| \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \bigg|_{(u,v)=\psi(s,t)} \right\|.$$

Quindi, per definizione, l'area di $\varphi \circ \psi$ è

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} \left\| \frac{\partial \varphi \circ \psi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi \circ \psi}{\partial t} \right\| ds\, dt &= \int_{\Omega'} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \bigg|_{(u,v)=\psi(s,t)} \right\| \left| \det \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} \right| ds\, dt \\
&= \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du\, dv,
\end{aligned}$$

applico il cambio di variabile

che è proprio l'area di φ. □

Esempio (Proiezione stereografica)**.** Calcoliamo la superficie della sfera con un'altra parametrizzazione. Se indichiamo con N il polo Nord della sfera e con S il polo sud, definiamo la proiezione stereografica come

$$\pi \colon S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2, S \mapsto 0, S^2 \cap \{z \leqslant 0\} \mapsto B_1(\bar{0}), S^2 \cap \{z > 0\} \mapsto B_1(\bar{0})^c.$$

Quindi, tramite compattificazione, abbiamo trovato un omeomorfismo tra S^2 e $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Parametrizziamo la sfera con π^{-1} e calcoliamone l'area.
Osserviamo che, se prendiamo un punto $P = (x, y, z)$ sulla sfera e $G = \pi(P)$ la sua proiezione, i triangoli rettangoli identificati da P, G con il polo Nord e con la loro proiezione sull'asse z sono simili e che il loro rapporto di similitudine è $1 - z$. Da cui

$$\pi \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{1-z} \\ \frac{y}{1-z} \\ 0 \end{pmatrix} \implies \pi^{-1} \colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{2u}{1+u^2+v^2} \\ \frac{2v}{1+u^2+v^2} \\ \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2} \end{pmatrix}$$

Calcolando il prodotto vettore si ha

$$\left\| \frac{\partial \pi^{-1}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \pi^{-1}}{\partial v} \right\| = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}.$$

Per trovare l'area della sfera calcoliamo due volte l'area dell'emisfero Sud così da non dover considerare un'integrale improprio a causa del polo Nord. Per cui l'area

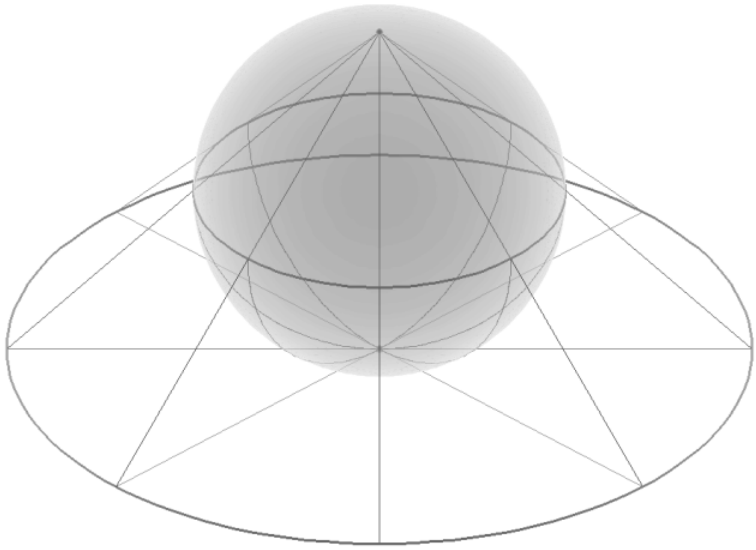

Figura 6.2: La proiezione stereografica.

dell'emisfero Sud è

applico il cambio di variabile

$$\begin{aligned}\int_{B_1(\bar{0})} \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}\,du\,dv &= \int_{\{(\rho,\vartheta)\,\mid\,\vartheta\in S^1, 0<\rho<1\}} \frac{4\rho}{(1+\rho^2)^2}\,d\rho\,d\vartheta = 4\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \frac{\rho}{(1+\rho^2)^2}\,d\rho \\ &= -4\pi \left.\frac{1}{1+\rho^2}\right|_0^1 = -4\pi\left(\frac{1}{2}-1\right) \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

Quindi abbiamo ritrovato che l'area della sfera è 4π.

Osservazione. Questa superficie, ottenuta aggiungendo un punto all'infinito al piano, si definisce, in analisi complessa, sfera di Riemann.

Esempio (Lambert)**.** Consideriamo la sezione verticale della sfera. Per ogni punto sulla circonferenza in sezione consideriamo una seconda circonferenza che sia centrata nell'origine e che abbia raggio pari alla distanza dell'origine dal punto. L'intersezione di tale circonferenza con l'asse x corrisponde alla proiezione di Lambert.

$$L\colon S^2\setminus\{N\}\to B_2(\bar{0}),\ \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\frac{u\sqrt{4-(u^2+v^2)}}{2}\\ \frac{v\sqrt{4-(u^2+v^2)}}{2}\\ \frac{u^2+v^2}{2}-1\end{pmatrix}$$

Ora è possibile dimostrare che se $A\subseteq S^2$ allora l'area di A corrisponde all'area di $L(A)$, per cui

$$ds = du\,dv \iff \left\|\frac{\partial L^{-1}(u,v)}{\partial u}\wedge\frac{\partial L^{-1}(u,v)}{\partial v}\right\| = 1.$$

Quindi $|S^2| = |B_2(\bar{0})| = 4\pi$.

6.4 TEOREMA DI GULDINO PER LE SUPERFICI

Teorema 6.6 – di Guldino per le superfici

L'area generata dalla rotazione di una curva regolare γ per un angolo α è data dalla lunghezza della curva moltiplicata per la lunghezza dell'area di circonferenza percorsa dal baricentro.

Dimostrazione. Dimostriamo il caso in cui la curva è un grafico. Avremo quindi $x = f(z)$ con $f \in C^1([a,b])$ e la parametrizzazione in coordinate cilindriche

$$\varphi \colon [a,b] \times [0,\alpha] \to (0,+\infty) \times S^1 \times \mathbb{R}, \begin{pmatrix} \lambda \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(\lambda) \\ \vartheta \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Componiamo con la mappa che ci porta nelle coordinate cartesiane per ottenere

$$\tilde{\varphi} \colon \begin{pmatrix} \lambda \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(\lambda)\cos\vartheta \\ f(\lambda)\sin\vartheta \\ \lambda \end{pmatrix}$$

A questo punto basta verificare che l'espressione dell'area corrisponde con la tesi. Calcoliamo il prodotto vettore

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\lambda} \wedge \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\vartheta} &= \det \begin{pmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ f'(\lambda)\cos\vartheta & f'(\lambda)\sin\vartheta & 1 \\ -f(\lambda)\sin\vartheta & f(\lambda)\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \bar{\imath}(-f(\lambda)\cos\vartheta) - \bar{\jmath}(f(\lambda)\sin\vartheta) + \bar{k}(f'(\lambda)f(\lambda)). \end{aligned}$$

Da cui

$$\left\| \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\lambda} \wedge \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\vartheta} \right\| = f(\lambda)\sqrt{1+\left(f'(\lambda)\right)^2}.$$

Quindi l'area cercata è

$$\begin{aligned} \int\limits_{[a,b]\times(0,\alpha)} f(\lambda)\sqrt{1+\left(f'(\lambda)\right)^2}\, d\lambda\, d\vartheta &= \int_0^\alpha d\vartheta \int_a^b f(\lambda)\sqrt{1+\left(f'(\lambda)\right)^2}\, d\lambda \\ &= \alpha\int_a^b f(\lambda)\sqrt{1+\left(f'(\lambda)\right)^2}\, d\lambda = \alpha\int\limits_\gamma f\, ds. \end{aligned}$$

Per trovare l'espressione con il baricentro ci basta moltiplicare e dividere per $\int\limits_\gamma ds$, ottenendo

$$\alpha\int\limits_\gamma ds \frac{\int\limits_\gamma f\, ds}{\int\limits_\gamma ds},$$

dove

$$\int\limits_\gamma ds \qquad \text{è per definizione la lunghezza della curva,}$$

mentre

$$\frac{\int\limits_\gamma f\, ds}{\int\limits_\gamma ds} \qquad \text{è la distanza del baricentro dall'asse } z,$$

quindi

$$\alpha\frac{\int\limits_\gamma f\, ds}{\int\limits_\gamma ds} \qquad \text{è la lunghezza dell'area percorsa dal baricentro.}$$

□

Esempio. Consideriamo il toro costituito da un tubo di raggio r, il cui centro è distante R dall'origine. Tramite il teorema di Guldino si calcola facilmente che l'area della sua superficie è

$$2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 r R.$$

Dove $2\pi r$ è la lunghezza della circonferenza che costituisce la curva regolare che ruota attorno all'asse z. Inoltre, dal momento che il baricentro della circonferenza è chiaramente il suo centro, la lunghezza della circonferenza di raggio R sarà $2\pi R$.

6.5 TEOREMA DI BROUWER

Lemma 6.7. Sia $B = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1 \}$ e supponiamo che f sia una funzione di classe C^2 su $\mathring{B}$ e continua su B. Se $f|_{\partial B} = \mathrm{id}|_{\partial B}$, allora f è suriettiva su B.

Dimostrazione. Ci basta trovare un assurdo supponendo che f sia il meno suriettiva possibile, ovvero tale che $f(B) \subseteq \partial B$. Infatti se supponiamo per assurdo che f sia solo non suriettiva, ovvero che esista $\bar{x} \in B$ tale che $\bar{x} \notin f(B)$, possiamo trovare una funzione P che soddisfi le ipotesi del lemma e che sia del tipo $P(B) \subseteq \partial B$.
Infatti $f(B)$ è compatto in quanto B è compatto, per cui $f(B)^c$ è aperto. In particolare troviamo $r > 0$ tale che $B_r(\bar{x}) \subseteq f(B)^c$.
Definiamo la mappa $P(x)$ in modo che mandi x nell'intersezione del segmento $\overline{\bar{x}\, f(x)}$, prolungato dalla parte di $f(x)$, con la circonferenza ∂B.
Si mostra facilmente che $P \in C^2(\mathring{B}, \mathbb{R}^2) \cap C(B, \mathbb{R}^2)$, in quanto posso comporre con l'applicazione che proietta $z \in B$ su ∂B tramite il segmento che congiunge z con $\bar{x}$. Tale applicazione è banalmente C^2 in ogni punto diverso da $\bar{x}$, ma, dal momento che $\bar{x} \notin f(B)$, avremo $z = f(x) \neq \bar{x}$, $\forall\, x \in \mathring{B}$.
Inoltre P è l'identità sul bordo, in quanto

$$x \in \partial B \implies f(x) = x \implies P(x) = x.$$

Grazie a questo argomento è chiaro che ci basta dimostrare che non esistano mappe f con la regolarità richiesta e tali che

$$f(x) = x, \ \forall\, x \in \partial B \qquad \text{e} \qquad f(B) \subseteq \partial B.$$

Scriviamo le generiche componenti della funzione

$$f \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

Per ottenere una contraddizione sfruttiamo il grado di f, definito come

$$\deg f = \int_B du \wedge dv.$$

L'idea è calcolare il grado con due procedimenti diversi per ottenere risultati contraddittori. Applicando Stokes avremo

ricordiamo che su ∂B si ha $u(x,y) = x$ e $v(x,y) = y$.

$$\begin{aligned} \deg f &= \int_B du \wedge dv = \int_B d\frac{1}{2}(u\, dv - v\, du) = \int_{\partial B} \frac{1}{2}(u\, dv - v\, du) \\ &= \int_{\partial B} \frac{1}{2}(x\, dy - y\, dx) = \pi. \end{aligned}$$

D'altronde, sfruttando la definizione di jacobiano,

$$\begin{aligned}\deg f &= \int_B du \wedge dv = \int_B (\partial_x u \, dx + \partial_y u \, dy) \wedge (\partial_x v \, dx + \partial_y v \, dy) \\ &= \int_B (\partial_x u \, \partial_y v - \partial_x v \, \partial_y u) \, dx \wedge dy = \int_B \det \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} dx \, dy\end{aligned}$$

ma

$$\det \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} dx \, dy = 0 \implies \deg f = 0,$$

in quanto le derivate parziali sono parallele.
Per dimostrare quest'ultima osservazione definiamo

$$g_1(t) = f(x+t, y) \qquad \text{e} \qquad g_2(t) = f(x, y+t),$$

tali funzioni costituiscono una curva in quanto $f(B) \subseteq \partial B$. In particolare $g_1'(0)$ e $g_2'(0)$ sono entrambi vettori tangenti a $f(x, y)$ e sono pertanto paralleli. D'altronde, per la regola della catena,

$$g_1'(0) = f'(x+t, y)|_{t=0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_x v \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad g_2'(0) = f'(x, y+t)|_{t=0} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y u \\ \partial_y v \end{pmatrix}.$$

Quindi ho trovato che $\deg f = \pi = 0$ che è assurdo. □

Teorema 6.8 – di Brouwer

Sia $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1 \}$ e supponiamo che f sia una funzione di classe C^2 su $\mathring{B}$ e continua su B. Se $f(B) \subseteq B$ allora esiste $x \in B$ tale che $f(x) = x$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $f(x) \neq x$, $\forall\, x \in B$. Definiamo la mappa $P(x)$ in modo che mandi x nell'intersezione del segmento $\overline{x\, f(x)}$, prolungato dalla parte di x, con la circonferenza ∂B. Come nel caso del lemma precedente si mostra facilmente che $P \in C^2(\mathring{B}, \mathbb{R}^2) \cap C(B, \mathbb{R}^2)$. Inoltre vale $P(x) = x$ se $x \in \partial B$. Per cui le ipotesi del lemma sono soddisfatte e P dovrebbe risultare suriettiva. Ma ciò è ovviamente assurdo in quanto $P(B) = \partial B$. □

Osservazione. Il caso monodimensionale con $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ continua segue dal teorema del valore intermedio applicato a $g(x) = x - f(x)$.
Infatti $g(0) = -f(0) \leqslant 0$ in quanto $f(0) \in [0, 1]$. D'altronde $g(1) = 1 - f(1) \geqslant 0$ in quanto $f(1) \in [0, 1]$. Quindi per il teorema del valore intermedio esiste $x \in [0, 1]$ tale che $g(x) = 0$, ovvero $f(x) = x$.

6.6 TEOREMA DELLA DIVERGENZA IN TRE DIMENSIONI

Teorema 6.9 – della divergenza in tre dimensioni

Sia T un unione finita di domini aperti e normali rispetto a tutti e tre gli assi. Sia F un'applicazione di classe C^1 su T e continua sulla chiusura $\overline{T}$. Allora

$$\iiint_T \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial T} \langle F, n \rangle \, dS.$$

Dimostrazione. Scriviamo T come dominio normale rispetto a z,

$$T = \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in D, \alpha(x, y) < z < \beta(x, y) \}.$$

Utilizzando le formule di riduzione, avremo

tramite il TFC

$$\begin{aligned}\iiint_T \partial_z F_3(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \iint_D dx \, dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} \partial_z F_3(x, y, z) \, dz \\ &= \iint_D \Big[F_3\big(x, y, \beta(x, y)\big) - F_3\big(x, y, \alpha(x, y)\big) \Big] \, dx \, dy.\end{aligned}$$

Ora vorremmo calcolare $\iint_{\partial T} F_3 n_3 \, dS$ e verificare che coincide con il risultato appena trovato.
Osserviamo che in quanto dominio normale rispetto alle z, possiamo suddividere ∂T in tre superfici S_1, S_2 e S_3, dove

- S_1 è la calotta superiore parametrizzata da $\psi \colon D \to \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \big(u, v, \beta(u, v)\big)$;
- S_2 è la calotta inferiore parametrizzata da $\psi \colon D \to \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \big(u, v, \alpha(u, v)\big)$;
- S_3 è la superficie che congiunge S_1 e S_2.

In particolare avremo

$$\iint_{\partial T} F_3 n_3 \, dS = \iint_{S_1} F_3 n_3 \, dS + \iint_{S_2} F_3 n_3 \, dS + \iint_{S_3} F_3 n_3 \, dS.$$

Ora

$$\iint_{S_3} F_3 n_3 \, dS = 0,$$

in quanto $n_3 = 0$ su S_3. Per verificarlo, parametrizziamo S_3 e calcoliamo il vettore normale. Siano $\gamma \colon S^1 \to \partial D, t \mapsto \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$ e

$$\psi \colon \Big\{ (t, s) \Bigm| t \in S^1, \alpha\big(\gamma(t)\big) < s < \beta\big(\gamma(t)\big) \Big\}, (t, s) \mapsto \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t), s\big).$$

A questo punto basta calcolare il prodotto vettore e verificare che è nullo nella componente verticale.
Per S_1 abbiamo già trovato una parametrizzazione, calcoliamo il prodotto vettore

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial v} = \det \begin{pmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & 0 & \partial_u \beta \\ 0 & 1 & \partial_v \beta \end{pmatrix} = -\bar{\imath} \partial_u \beta - \bar{\jmath} \partial_v \beta + \bar{k}$$

Dal momento che la terza componente è 1 avremo che, per normalizzazione

$$n_3 = \frac{1}{\|\partial_u \psi \wedge \partial_v \psi\|},$$

da cui

$$\iint_{S_1} F_3 n_3 \, dS = \iint_D F_3\big(u, v, \beta(u,v)\big) \frac{1}{\|\partial_u \psi \wedge \partial_v \psi\|} \|\partial_u \psi \wedge \partial_v \psi\| \, du \, dv$$
$$= \iint_D F_3\big(u, v, \beta(u,v)\big) \, du \, dv.$$

Resta da calcolare su S_2, ma ovviamente osserveremo un comportamento del tutto analogo; eccetto il segno del versore che sarà negativo così da farlo puntare all'esterno. Quindi infine

$$\iint_{\partial T} F_3 n_3 \, dS = \iint_D F_3\big(u, v, \beta(u,v)\big) \, du \, dv - \iint_D F_3\big(u, v, \alpha(u,v)\big) \, du \, dv,$$

che coincide proprio con quanto calcolato inizialmente.
Con lo stesso procedimento si verifica che

$$\iiint_T \partial_y F_2(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial T} F_2 n_2 \, dS \qquad \text{e} \qquad \iiint_T \partial_x F_1(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial T} F_1 n_1 \, dS,$$

dal momento che il dominio è per ipotesi normale rispetto a tutti gli assi. Da cui la tesi. □

Osservazione. In $\mathbb{R}^{2n}$ posso sempre trovare un campo non nullo con divergenza nulla. Ad esempio in $\mathbb{R}^2$ posso considerare

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies \operatorname{div} F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \operatorname{div} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \partial_x(y) + \partial_y(x) = 0.$$

In generale possiamo sempre considerare la matrice

$$J = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & \mathbf{0} \\ & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & \\ \mathbf{0} & & \ddots \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Esempio. Troviamo la relazione tra l'area e il volume della sfera. Consideriamo

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Applicando il teorema della divergenza avremo

$$\iiint_{B_1^2(\bar{0})} \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = \iint_{S^2} \langle F, n \rangle \, dS.$$

Dove

$$\operatorname{div} F = 3 \implies \iiint_{B_1^2(\bar{0})} \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = 3\big|B_1^2(\bar{0})\big|.$$

D'altronde il versore normale alla sfera è (x, y, z), in quanto posso definire S^2 come la superficie associata a $G\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1$, da cui

$$n = \frac{\nabla G}{\|\nabla G\|} = \frac{2(x, y, z)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = (x, y, z),$$

in quanto $(x, y, z) \in S^2 \implies x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Quindi

$$\langle F, n \rangle = x^2 + y^2 + z^2 = 1 \implies \iint_{S^2} dS = \text{ area}(S^2).$$

Ovvero $\text{area}(S^2) = 3\left|B_1^2(\bar{0})\right|$, infatti $4\pi = \frac{4}{3}\pi$.

Esempio. Calcoliamo il flusso di F attraverso ∂T, con

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ y\,z \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad T = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leqslant z^2, z \geqslant 0, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2y \right\}.$$

Per il teorema della divergenza

$$\iint_{\partial T} \langle F, n \rangle \; dS = \iiint_T \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = \iiint_T z \, dx \, dy \, dz.$$

Ora $T = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, (x, y) \in B_1\big((0, 1)\big), \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - x^2 - (y-1)^2} \right\}$. Inoltre vale la condizione implicita

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant \sqrt{1 - x^2 - (y-1)^2} \iff x^2 + y^2 \leqslant y,$$

ovvero

$$T = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}\big((0, 1/2))\big), \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - x^2 - (y-1)^2} \right\}.$$

Da cui

$$\iiint_T z \, dx \, dy \, dz = \iint_{B_{1/2}\left((0,1/2)\right)} dx \, dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2y - (x^2+y^2)}} z \, dz = \iint_{B_{\frac{1}{2}}\left((0,1/2)\right)} y - (x^2 + y^2) \, dx \, dy.$$

A questo punto basta passare in coordinate polari per ottenere il risultato di $\pi/32$.

Proposizione 6.10 – Relazione tra volume e area del bordo

Sia D un dominio regolare tale che $D \subseteq B_R(\bar{0})$. Allora

$$|D| \leqslant \frac{R}{3} \, \text{area}(\partial D).$$

Dimostrazione. Consideriamo il campo identità

$$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Applicando il teorema della divergenza,

$$\iiint_D \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial D} \langle F, n \rangle \, dS,$$

dove

$$\iiint_D \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = 3|D|,$$

mentre, tramite la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$\iint_{\partial D} \langle F, n \rangle \, dS \leqslant \iint_{\partial D} \underbrace{\|F\|}_{\leqslant R} \, \underbrace{\|n\|}_{=1} \, dS \leqslant R \iint_{\partial D} dS = R \operatorname{area}(\partial D).$$ □

Osservazione. Se D è la sfera vale l'uguaglianza.

6.7 APPENDICE

Definizione 6.11 – Laplaciano

Sia f una funzione di classe C^2. Il *laplaciano*, o operatore di Laplace, associato ad f, si definisce come la divergenza del gradiente di f.

Notazione. Si scrive

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f.$$

Proposizione 6.12 – Prima equazione di Green

Sia D un dominio regolare in $\mathbb{R}^3$. Siano $R \colon D \to \mathbb{R}^3$ e $\psi \colon D \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 su D e continua fino al bordo. Supponiamo che

$$R(x, y, z) = (\partial_x \varphi, \partial_y \varphi, \partial_z \varphi),$$

con φ una funzione di classe C^2 su D e C^1 fino al bordo. Allora

$$\iiint_D \big(\langle \nabla\psi, \nabla\varphi \rangle + \psi\Delta\varphi \big) \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial D} \psi \, \partial_n \varphi \, dS.$$

Dimostrazione. Calcoliamo la divergenza di ψR:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\psi R) &= \operatorname{div}(\psi \, \partial_x \varphi, \psi \, \partial_y \varphi, \psi \, \partial_z \varphi) \\ &= (\partial_x \psi \, \partial_x \varphi + \partial_y \psi \, \partial_y \varphi + \partial_z \psi \, \partial_z \varphi) + \psi(\partial^2_{x\,x} \varphi + \partial^2_{y\,y} \varphi + \partial^2_{z\,z} \varphi) \\ &= \langle \nabla\psi, \nabla\varphi \rangle + \psi \, \Delta\varphi. \end{aligned}$$

Ovvero $\operatorname{div}(\psi \, \Delta\varphi) = \langle \nabla\psi, \nabla\varphi \rangle + \psi \, \Delta\varphi$. Applicando il teorema della divergenza a $F = \psi \, \Delta\varphi$ otteniamo

$$\iiint_D \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial D} \langle F, n \rangle \, dS,$$

dove $\langle F, n \rangle = \psi \, \langle \nabla\varphi, n \rangle = \psi \, \partial_n \varphi$. Ovvero

$$\iiint_D \big(\langle \nabla\psi, \nabla\varphi \rangle + \psi\Delta\varphi \big) \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial D} \psi \, \partial_n \varphi \, dS.$$ □

Proposizione 6.13 – Seconda equazione di Green

Sia D un dominio regolare in $\mathbb{R}^3$. Siano $\varphi, \psi \colon D \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^2 su D e C^1 fino al bordo. Allora

$$\iiint_D (\psi\, \Delta\varphi - \varphi\, \Delta\psi)\, dx\, dy\, dz = \iint_D (\psi\, \partial_n \varphi - \varphi\, \partial_n \psi)\, dS.$$

Dimostrazione. Dal momento che φ e ψ soddisfano vicendevolmente le ipotesi della prima equazione di Green, avremo

$$\iiint_D \big(\langle \nabla\psi, \nabla\varphi \rangle + \psi\Delta\varphi \big)\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial D} \psi\, \partial_n \varphi\, dS,$$

e

$$\iiint_D \big(\langle \nabla\varphi, \nabla\psi \rangle + \varphi\Delta\psi \big)\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial D} \varphi\, \partial_n \psi\, dS.$$

Per ottenere la tesi è sufficiente sottrarre membro a membro. □

Definizione 6.14 – Funzione armonica

Una funzione $f \colon D \to \mathbb{R}$ di classe C^2 si dice *armonica* se il suo laplaciano è costantemente nullo. Ovvero

$$\Delta f = 0, \ \forall\, x \in D.$$

Teorema 6.15 – Funzione armonica nulla sul bordo

Sia $h \colon D \to \mathbb{R}$ una funzione armonica. Supponiamo che h sia costantemente nulla su ∂D. Allora $h \equiv 0$ su D.

Dimostrazione. In quanto armonica h è certamente una funzione di classe C^2. Ricordando che $\Delta h = 0$ e che $h|_{\partial D} \equiv 0$, applichiamo la prima equazione di Green con $\varphi = \psi = h$:

$$\iiint_D |\nabla h|^2\, dx\, dy\, dz = 0,$$

per cui $\nabla h \equiv 0$, ovvero, per Lagrange, $h \equiv$ cost. Ma $h \equiv 0$ su ∂D, per cui $h \equiv 0$ su D. □

Teorema 6.16 – Funzioni armoniche coincidenti sul bordo

Siano $h_1, h_2 \colon D \to \mathbb{R}$ due funzioni armoniche. Supponiamo che $h_1 \equiv h_2$ su ∂D. Allora $h_1 \equiv h_2$ su D.

Dimostrazione. Basta applicare il teorema precedente alla funzione armonica $h_1 - h_2$. □

Teorema 6.17 – Ulteriori proprietà delle funzioni armoniche

Sia $h \colon D \to \mathbb{R}$ una funzione armonica. Supponiamo che $\partial_n h \equiv 0$ su ∂D. Allora $h \equiv$ cost su D.

Dimostrazione. Applichiamo la prima formula di Green con $\psi = \varphi = h$

$$\iiint_D |\nabla h|^2 \, dx\, dy\, dz = 0,$$

da cui $|\nabla h| = 0$, ovvero, per Lagrange, $h \equiv \text{cost}$. □

Corollario. Se h_1, h_2 sono funzioni armoniche su D, tali che $\partial_n h_1 \equiv \partial_n h_2$ su ∂D; allora $h_1 - h_2 \equiv \text{cost}$.

Dimostrazione. Basta applicare il teorema precedente alla funzione armonica $h_1 - h_2$. □

Esempio (Gabbia di Faraday)**.** Se consideriamo una struttura tale che W sia il campo elettrico interno e V quello esterno. Supponendo che $\Delta W = 0$ nella struttura e $W \equiv \text{cost}$ sul bordo, allora $W \equiv \text{cost}$. Per cui il campo ∇W è nullo.

INDICE ANALITICO