Università degli Studi di Roma Tre

FACOLTÀ DI MATEMATICA

Appunti integrativi

Topologia generale e algebrica

GE220

Di:
Edoardo Signorini

A.A. 2015–2016, Semestre II

INDICE

1 TOPOLOGIA GENERALE 3
1.1 Spazi metrici 3
1.2 Insiemi aperti 4
1.3 Spazi topologici 6
1.4 Successioni 10

2 APPLICAZIONI CONTINUE 12
2.1 Introduzione 12
2.2 Proprietà locali e globali 13
2.3 Omeomorfismi 14

3 VARIETÀ TOPOLOGICHE 18
3.1 Introduzione 18
3.2 Interiori, esteriori e bordi 19
3.3 Varietà topologiche 23

4 NUOVI SPAZI TOPOLOGICI 26
4.1 Sottospazi 26
4.2 Spazi prodotto 31
4.3 Spazi quoziente 34
4.4 Azioni di gruppi 38

5 CONNESSIONE E COMPATTEZZA 42
5.1 Spazi connessi 42
5.2 Connessione per archi 45
5.3 Componenti connesse 47
5.4 Spazi compatti 50
5.5 Compattezza per successionI e per punti limite 56
5.6 Closed map lemma 56

6 TOPOLOGIA ALGEBRICA 58
6.1 Omotopie 58
6.2 Gruppo fondamentale 62
6.3 Categorie e funtori 66
6.4 Retratti 67
6.5 Equivalenza omotopica 69
6.6 Teorema di Van Kampen 72

7 RIVESTIMENTI TOPOLOGICI 75
7.1 Introduzione 75
7.2 Proprietà di sollevamento 78

Indice analitico 80

1 TOPOLOGIA GENERALE

La *topologia* studia gli aspetti geometrici più generali, senza introdurre né strutture algebriche, né metriche, né coordinate.

1.1 SPAZI METRICI

Definizione 1.1 – Spazio metrico

Sia $X \neq \emptyset$ un insieme. Diremo che X è uno *spazio metrico* se è definita un'applicazione

$$d \colon X \times X \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y),$$

detta *distanza*, che rispetti le seguenti proprietà:

Positività $d(x, y) \geqslant 0$, $\forall\, x, y \in X$ e $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

Simmetria $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall\, x, y \in X$;

Triangolare $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$, $\forall\, x, y, z \in X$.

Notazione. Da questo momento con *funzione* denoteremo un'applicazione che ha $\mathbb{R}$ come codominio.

Esercizio. $\mathbb{R}$ è uno spazio metrico, ponendo

$$d(x, y) = |y - x|.$$

Soluzione. É sufficiente verificare che le proprietà della definizione 1.1 siano verificate. La positività segue banalmente dalla definizione di valore assoluto. Per la simmetria osserviamo che

$$d(x, y) = |y - x| = |-(x - y)| = |x - y| = d(y, x).$$

Infine, dal momento che la disuguaglianza triangolare è valida per il valore assoluto, segue

$$d(x, y) = |y - x| = |y - z + z - x| \leqslant |y - z| + |z - x| = d(z, y) + d(x, z).$$

Esempio. $\mathbb{R}^n$ è uno spazio metrico, ponendo

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{y} - \underline{x}\|.$$

Esempio. Sia $X \neq \emptyset$ un insieme qualsiasi, X è uno spazio metrico ponendo

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases},$$

tale applicazione si definisce *distanza discreta*.

Proposizione 1.2 – Sottoinsieme di uno spazio metrico è uno spazio metrico

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $Y \subset X$, allora: $(Y, d|_Y)$ è uno spazio metrico, con

$$d|_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}, (y', y'') \mapsto d(y', y'').$$

Dimostrazione. (X, d) è uno spazio metrico, quindi per definizione d costituisce una distanza su X. Consideriamo quindi la restrizione $d|_Y$ di d su Y, tale applicazione soddisfa necessariamente le proprietà della distanza in quanto è definita a partire da d. Pertanto $(Y, d|_Y)$ è uno spazio metrico. □

Notazione. $d|_Y$ di definisce *distanza indotta*.

Definizione 1.3 – Sottospazio metrico

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $Y \subset X$. $(Y, d|_Y)$ si definisce *sottospazio metrico* di (X, d).

Definizione 1.4 – Applicazione continua tra spazi metrici

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici. Un'applicazione $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ si dice *continua* se, comunque preso $x_0 \in X$

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tale che } d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon.$$

Esercizio (per casa)**.** Si dimostri che ogni applicazione costante tra spazi metrici è continua.

Soluzione. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, definiamo quindi una generica applicazione costante

$$f : X \to Y, x \mapsto y_0 \in Y,$$

con y_0 fissato. Sia ora $x_0 \in X$ e fissiamo $\varepsilon > 0$, osserviamo quindi che, preso un qualsiasi $x \in X$, avremo

$$d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) = d_Y(y_0, y_0) = 0 < \varepsilon,$$

indipendentemente da $d_X(x, x_0)$. Dalla definizione 1.4 segue quindi che f è continua.

Esercizio (per casa)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico, si dimostri che $\mathrm{id}_X : X \to X, x \mapsto x$ è continua.

Soluzione. Sia $x_0 \in X$ e fissiamo $\varepsilon > 0$, poniamo quindi $\delta > 0$ tale che $\delta < \varepsilon$, da cui

$$d(x, x_0) < \delta \implies d\big(\mathrm{id}(x), \mathrm{id}(x_0)\big) = d(x, x_0) < \delta < \varepsilon,$$

ovvero f è continua.

1.2 INSIEMI APERTI

Definizione 1.5 – Disco aperto

Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia $x \in X$ e sia $r > 0$. Si definisce *disco aperto* di centro x e raggio r, il sottoinsieme di X di tutti i punti la cui distanza da x è inferiore ad r:

$$D_x(r) = \{\, y \in X \mid d(y, x) < r \,\}.$$

Esempio. Su $(\mathbb{R}, |.|)$ i dischi aperti di centro x e raggio r sono gli intervalli aperti $(x - r, x + r)$.

Esempio. Su $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ i dischi aperti sono palle aperte.

Definizione 1.6 – Insieme aperto

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$. A è un insieme aperto se può essere scritto come unione di dischi aperti.

Osservazione. Equivalentemente possiamo definire A aperto se

$$\forall\, x \in A\, \exists\, r > 0 : D_x(r) \subset A,$$

infatti basterà mostrare che

$$A = \bigcup_{x \in A} D_x(r).$$

Sia $z \in A$, avremo quindi $z \in D_z(r) \implies z \in \bigcup_{x \in A} D_x(r)$; $\subseteq$
Sia $z \in \bigcup_{x \in A} D_x(r)$, per cui $z \in D_z(r)$, ma per ipotesi $D_z(r) \subset A$, ovvero $z \in A$. $\supseteq$

Esempio. Sono aperti di $(\mathbb{R}, |.|)$ i seguenti:

- $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} D_n(1)$, oppure $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} D_0(n)$;
- $\emptyset$;
- $(a, b) = D_c(\frac{b-a}{2})$, dove $c = \frac{a+b}{2}$ è il punto medio fra a, b;
- $(a, +\infty)$;
- $(-\infty, b)$.

Esempio. Non sono aperti di $(\mathbb{R}, |.|)$ i seguenti:

- Insiemi finiti;
- $\mathbb{Z}$;
- $\mathbb{Q}$;
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Esercizio (per casa)**.** Su $(\mathbb{R}, |.|)$ si dimostri che un intervallo chiuso $[a, b]$ non è un insieme aperto.

Soluzione. Se per assurdo $[a, b]$ fosse aperto, avremmo che

$$\forall\, x \in [a, b]\, \exists\, r > 0 : D_x(r) \subset [a, b],$$

in particolare $\exists\, r > 0 : D_a(r) \subset [a, b]$, dove

$$D_a(r) = \{\, x \in \mathbb{R} : |a - x| < r \,\}.$$

Sia ora $0 < r' < r$, segue banalmente che $a - r' \in D_a(r)$, ma ciò è assurdo, in quanto $a - r' \notin [a, b]$. Quindi $[a, b]$ non è un aperto di $\mathbb{R}$.

Esercizio (per casa)**.** Su $(\mathbb{R}, |.|)$ si dimostri che un intervallo semichiuso $[a, b)$ non è un insieme aperto.

Soluzione. Analoga alla precedente.

Teorema 1.7 – Continuità definita per aperti

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f \colon X \to Y$, allora:

$$f \text{ è continua} \iff f^{-1}(A) \text{ è aperto}, \ \forall\ A \subset Y \text{ aperto}.$$

$\Rightarrow)$ *Dimostrazione.* Sia $\emptyset \neq A \subset Y$ aperto e sia $x \in f^{-1}(A) \subset X$, vogliamo dimostrare che $f^{-1}(A)$ è aperto. Dobbiamo quindi mostrare che

$$\exists\ r > 0 : D_x(r) \subset f^{-1}(A).$$

Ora A aperto implica

$$\exists\ \varepsilon > 0 : D_{f(x)}(\varepsilon) \subset A, \ \forall\ f(x) \in A,$$

inoltre f continua, per cui

$$\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) : f\big(D_x(\delta)\big) \subset D_{f(x)}(\varepsilon),$$

in particolare

$$D_{f(x)}(\varepsilon) \subset A \implies f\big(D_x(\delta)\big) \subset A,$$

ovvero

$$D_x(\delta) \subset f^{-1}(A).$$

$\Leftarrow)$ La dimostrazione è analoga. □

Osservazione. La nozione di applicazione continua su uno spazio metrico qualsiasi, non dipende quindi dalla distanza, ma solamente dalla nozione di insieme aperto.

1.3 SPAZI TOPOLOGICI

Definizione 1.8 – Topologia su un insieme

Sia $X \neq \emptyset$ un insieme. Una famiglia T di sottoinsiemi di X, detti *insiemi aperti*, si definisce una *topologia* su X se soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\emptyset$ e X appartengo a T;
2. l'unione qualsiasi di aperti è un aperto;
3. l'intersezione finita di aperti è un aperto.

Notazione. Se $A \in T$, si dice che A è un aperto di X.

Definizione 1.9 – Spazio topologico

Sia $X \neq \emptyset$ un insieme e sia T una topologia su X. Si definisce *spazio topologico* la coppia X, T.

Notazione. Gli elementi $x \in X$ si definiscono *punti* di X.

Le definizioni che seguono mostrano alcuni esempi di spazi topologici.

Definizione 1.10 – Topologia indotta dalla metrica

Sia (X, d) uno spazio metrico. Gli insiemi aperti della definizione 1.6 inducono una topologia su X, detta *topologia indotta dalla metrica.*

Osservazione. Mostriamo che tale topologia verifica le proprietà:

1. Banalmente
$$\emptyset = \bigcup_{\emptyset} D_x(r),$$
e
$$X = \bigcup_{x \in X} D_x(r).$$
2. Per definizione A_i è aperto se e soltanto se
$$A_i = \bigcup_{\substack{x_i \in X \\ r_i > 0}} D_{x_i}(r_i),$$
per cui
$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} A_i &= \bigcup_{i \in I} \bigcup_{\substack{x_i \in X \\ r_i > 0}} D_{x_i}(r_i) \\ &= \bigcup_{i \in I} D_{x_i}(r_i), \end{aligned}$$
ovvero
$$\bigcup_{i \in I} A_i$$
è aperto.
3. Siano $A_1, \ldots, A_n \in T$, dobbiamo mostrare che
$$\bigcap_{i=1,\ldots,n} A_i \in T.$$
Ma ciò vale se e soltanto se
$$B_1, B_2 \in T \implies B_1 \cap B_2 \in T,$$
in quanto ciò ci permette di procedere per induzione. Nel nostro caso abbiamo infatti:
$$B_1 \cap B_2 = \bigcup_{\substack{x \in B_1 \cap B_2 \\ r : D_x(r) \subset B_1 \cap B_2}} D_x(r).$$

Esempio. La topologia naturale di $\mathbb{R}^n$ è lo spazio metrico $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$.

Definizione 1.11 – Topologia banale

Sia X un insieme qualsiasi. $T = \{\emptyset, X\}$ si definisce *topologia banale* di X.

Definizione 1.12 – Topologia discreta

Sia X un insieme qualsiasi. $T = \mathcal{P}(X)$ si definisce *topologia discreta* di X.

Esercizio. Sia $X = \{a, b, c, d\}$ un insieme di 4 elementi. Siano

$$T = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$$
$$S = \{X, \emptyset, \{b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Stabilire se T o S sono due topologie diverse dello stesso insieme X.

Soluzione. Verificando le proprietà segue banalemte che entrambe sono topologie di X, inoltre

$$\{a\} \notin S \text{ e } \{b\} \notin T,$$

per cui non costituiscono le stesse topologie.

Esercizio. Rifacendosi all'esercizio precedente, stabile se

$$R = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}$$

è una topologia su X.

Soluzione. No, in quanto

$$\{a, b, c\} \cap \{b, c, d\} = \{b, c\},$$

ma

$$\{b, c\} \notin R.$$

Definizione 1.13 – Relazione di finezza

Sia X un insieme su cui sono definite due topologie T e T'. Diremo che T' è più *fine* di T se ogni aperto di T è anche aperto di T'.

Notazione. Si scrive $T' > T$.

Osservazione. Qualunque sia X avremo sempre che la topologia banale è la meno fine, mentre quella discreta è la più fine.

Definizione 1.14 – Base

Una base di uno spazio topologico (X, T) è una famigli di aperti $\mathcal{B}$ tale che ogni aperto di X è unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Esercizio (per casa)**.** Mostrare che, equivalentemente, $\mathcal{B}$ è una base se e soltanto se

$$\forall\, A \subset X \text{ aperto e } \forall\, x \in A\, \exists\, B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq A. \tag{1.1}$$

$\Rightarrow)$ *Soluzione.* Supponiamo che $\mathcal{B}$ sia una base di T e sia A un aperto di X, per cui

$$A = \bigcup_{i \in I} B_i, \text{ con } B_i \in \mathcal{B}.$$

Sia ora $x \in A$, quindi $\exists\, i \in I$ tale che $x \in B_i$. Resta da mostrare che $B \subseteq A$, ma ciò segue immediatamente dalla scrittura di A come unione di B_i.
Supponiamo che $\mathcal{B}$ soddisfi (1.1) e sia A un aperto di X. Noi vorremmo mostrare che $\Leftarrow)$

$$A = \bigcup_{x \in A} B_x, \text{ con } B_x \in \mathcal{B}.$$

Sia quindi $x \in A$, avremo quindi che

$$\exists\, B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subseteq A,$$

ovvero

$$A \subseteq \bigcup_{x \in A} B_x.$$

Sia $y \in \bigcup_{x \in A} B_x$, avremo $\exists\, B_x : y \in B_x$, ma $B_x \in \mathcal{B}$, quindi, per ipotesi, $B \subseteq A$, ovvero

$$A \supseteq \bigcup_{x \in A} B_x.$$

Esempio. Gli intervalli limitati sono una base della topologia naturale di $\mathbb{R}$.

Esempio. Più in generale, i dischi di uno spazio metrico, sono una base della topologia indotta dalla metrica, ovvero

$$\mathcal{B} = \{\, D_x(r) \mid x \in X, r > 0 \,\}$$

è una base di (X, d).

Proposizione 1.15 – Caratterizzazione delle basi

Sia $\mathcal{B}$ una famiglia di sottoinsiemi di X tale che:

1. $\bigcup_{b \in \mathcal{B}} B = X$, ovvero $\mathcal{B}$ è un ricoprimento di X;
2. $\forall\, A, B \in \mathcal{B} \implies A \cap B$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Allora esiste un'unica topologia $T_{\mathcal{B}}$ su X tale che $\mathcal{B}$ è una base di $T_{\mathcal{B}}$.

Dimostrazione. Definiamo $T_{\mathcal{B}}$ come la famiglia dei sottoinsiemi di X che si possono scrivere come unione (tipicamente infinita) di elementi di $\mathcal{B}$. Tale scelta definisce $T_{\mathcal{B}}$ in maniera univoca. Dobbiamo quindi dimostrare che $T_{\mathcal{B}}$ è una topologia su X:

- $X \overset{(1)}{=} \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ e $\emptyset = \bigcup_{\emptyset} B$, per cui $\{\, \emptyset, X \,\} \in T_{\mathcal{B}}$.
- Sia ora $\{U_j\}_{j \in J}$ una famiglia di aperti di X, per costruzione avremo

$$U_j = \bigcup_{k \in K(j)} B_k, \text{ con } B_k \in \mathcal{B},$$

da cui

$$\bigcup_{j \in J} U_j = \bigcup_{j \in J} \left(\bigcup_{k \in K(j)} B_k \right) = \bigcup_{\substack{k \in K(j) \\ j \in J}} B_k,$$

ovvero un'unione di elementi di $\mathcal{B}$ che è pertanto un aperto.

- Sia infine $U_1, \dots, U_n$ una famiglia finita di aperti, dobbiamo verificare che

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i$$

sia aperto. Per farlo basta verificare che $U_1 \cap U_2$ sia aperto, ma ciò segue banalmente da (2), infatti

$$U_1 = \bigcup_{h \in H} B_h, \text{ con } B_h \in \mathcal{B};$$
$$U_2 = \bigcup_{k \in K} B_k, \text{ con } B_k \in \mathcal{B},$$

da cui

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\substack{h \in H \\ k \in K}} (B_h \cap B_k) \overset{(2)}{=} \bigcup_{\substack{h \in H \\ k \in K}} \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) \in T_{\mathcal{B}}.$$

□

Osservazione. Prese due basi $\mathcal{B}$e $\mathcal{B}'$ dello stesso insieme X, avremo che

$$T_{\mathcal{B}} < T_{\mathcal{B}'} \iff \mathcal{B} \subset \mathcal{B}'.$$

Definizione 1.16 – Intorno di un punto

Preso un punto $x \in X$ in uno spazio topologico (X, T), un *intorno* di x è un qualsiasi aperto U che contiene x

Notazione. Indicheremo con U_x un intorno di $x \in X$.

Definizione 1.17 – Intorno di un insieme

Sia (X, T) uno spazio topologico e sia $K \subset X$ un sottoinsieme qualsiasi. Un *intorno* di K è un aperto U che contiene K.

Proposizione 1.18 – Caratterizzazione degli aperti tramite intorni

Sia (X, T) uno spazio topologico e sia $A \subset X$. Allora A è aperto se e soltanto se

$$\forall\, x \in A \,\exists\, U_x : U_x \subseteq A.$$

$\Rightarrow)$ *Dimostrazione.* Se A è aperto basta prendere $U = A$, in quanto A è intorno di ogni suo punto.

$\Leftarrow)$ Supponiamo che, preso $x \in A$, U_x sia un suo intorno, è facile mostrare che

$$A = \bigcup_{x \in A} U_x.$$

Per cui A è aperto in quanto unione arbitraria di aperti. □

1.4 SUCCESSIONI

In questo paragrafo faremo riferimento allo spazio topologico X come la coppia (X, T).

Definizione 1.19 – Successione

Una *successione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in uno spazio topologico X è un'applicazione

$$\mathbb{N} \to X, n \mapsto x_n.$$

Definizione 1.20 – Successione convergente

Una successione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in uno spazio topologico X si dice *convergente* ad $x \in X$ se, per ogni intorno U di x

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \text{ tale che } x_n \in U, \forall\, n > N.$$

Notazione. Quando una successione è convergente si scrive $x_n \to x$ oppure

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

Esempio. Se (X, d) è uno spazio metrico, ovvero uno spazio topologico indotto dalla metrica, ritroviamo facilmente la definizione che abbiamo in analisi. Infatti, dal momento che i dischi sono una base della topologia, è sufficiente che U sia un disco, per cui, preso $U = D_\varepsilon(x)$, avremo

$$x_n \to x \iff \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < \varepsilon, \forall\, n > N.$$

$d(x_n, x) \iff x_n \in D_\varepsilon(x)$

Esempio. Se X ha la topologia banale, allora ogni successione $\mathbb{N} \to X$ converge ad ogni punto di X.

Esempio. Se X ha la topologia discreta, allora, le uniche successioni convergenti sono quelle costanti o definitivamente costanti,ovvero quelle dove

$$x_n = x_{n+1}, \forall\, n > N.$$

2 APPLICAZIONI CONTINUE

2.1 INTRODUZIONE

Definizione 2.1 – Applicazione continua tra spazi topologici

Siano (X, T) e (Y, S) due spazi topologici. Un'applicazione $f\colon X \to Y$ si definisce *continua* se la controimmagine di ogni aperto di Y è un aperto di X, ovvero se

$$f^{-1}(A) \in T, \ \forall\ A \in S.$$

Osservazione. É sufficiente verificare la condizione di continuità per gli elementi di una base $\mathcal{B}$ di S.

Lemma 2.2. Siano X, Y spazi topologici. Allora ogni applicazione costante

$$f\colon X \to Y, x \mapsto y_0,$$

è continua.

Dimostrazione. Sia $f\colon X \to Y, x \mapsto y_0$ un'applicazione costante e sia $U \in Y$ aperto, consideriamo quindi due casi:

- se $y_0 \in U$ allora $f^{-1}(U) = X$, che è un aperto di X;
- se $y_0 \notin U$ allora $f^{-1}(U) = \emptyset$, che è un aperto di X.

Per cui $f^{-1}(U)$ è un aperto di X comunque preso U aperto in Y, ovvero f è continua. □

Lemma 2.3. Sia X uno spazio topologico. Allora l'identità

$$\mathrm{id}_X\colon X \to X, x \mapsto x,$$

è continua.

Dimostrazione. Sia $\mathrm{id}_x\colon X \to X, x \mapsto x$ l'applicazione identità e sia U aperto in X, allora

$$\mathrm{id}^{-1}(U) = U,$$

che è aperto, per cui id_X è continua. □

Lemma 2.4. Siano X, Y due spazi topologici e sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua. Allora per ogni A aperto in X, anche la restrizione

$$f|_A\colon A \to Y,$$

è continua.

Dimostrazione. Sia U un aperto di Y e sia $V = f^{-1}(U)$, per la continuità di f avremo che V è un aperto di X. Dobbiamo verificare che $f|_A$ è continua, ma

$$f^{-1}|_A(U) = V \cap A,$$

che è un aperto in quanto intersezione di aperti, per cui $f|_A$ è continua. □

Lemma 2.5. Siano X, Y e Z spazi topologici e supponiamo che $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ siano applicazioni continue. Allora

$$g \circ f\colon X \to Z,$$

è continua.

Dimostrazione. Preso A un aperto di Z, dal momento che

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}\big(g^{-1}(A)\big),$$

avremo, g continua implica che $g^{-1}(A)$ è un aperto in Y. Infine f continua implica che $f^{-1}\big(g^{-1}(A)\big)$ è un aperto in X, da cui la continuità di $g \circ f$. □

2.2 PROPRIETÀ LOCALI E GLOBALI

Definizione 2.6 – Proprietà locale

Sia X uno spazio topologico. Diremo che una *proprietà topologica* $\mathcal{P}$ è *locale* se $\mathcal{P}$ vale in un intorno di ciascun punto $x \in X$.

Esempio. La continuità è una proprietà locale, come mostreremo nella prossima proposizione.

Proposizione 2.7 – Caratterizzazione della continuità tramite intorni

Siano X ed Y due spazi topologici. Allora un'applicazione $f\colon X \to Y$ è continua se e soltanto se ogni $x \in X$ possiede un intorno su cui la restrizione di f è continua.

Dimostrazione. Per il lemma 2.4, se f è continua, la restrizione di f è continua su ogni intorno di $x \in X$. $\Rightarrow)$

Supponiamo che per ogni $x \in X$, esista un intorno U_x di x, tale che la restrizione $f|_{U_x}\colon U_x \to Y$ è continua. Sia A un aperto di Y, per ipotesi $f^{-1}|_{U_x}(A)$ è un aperto di U_x, ma per definizione $U_x \subset X$, per cui $f^{-1}|_{U_x}(A)$ è un aperto di X. Quindi abbiamo che $\Leftarrow)$

$$f^{-1}|_{U_x}(A) = f^{-1}(A) \cap U_x,$$

che è un aperto di X. Infine

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{x\in X} f^{-1}|_{U_x}(A) = \bigcup_{x\in X} \big(f^{-1}(A) \cap U_x\big),$$

ma $f^{-1}(A) \cap U_x$ è un aperto di X, per cui

$$\bigcup_{x\in X} \big(f^{-1}(A) \cap U_x\big),$$

è un aperto di X. □

Osservazione. Dal teorema discende che per verifcare $f: X \to Y$ continua, è sufficiente verificarlo in un opportuno intorno di ciascun punto $x \in X$.
Ad esempio possiamo prendere U_x come elemento di una base, oppure, se (X, d) è metrico, basta verificare la continuità sui dischi.

2.3 OMEOMORFISMI

Definizione 2.8 – Omeomorfismo

Un *omeomorfismo* tra spazi topologici X ed Y, è un'applicazione

$$\varphi: X \to Y,$$

tale che:

- φ è continua;
- φ è biiettiva;
- φ^{-1} è continua.

Esempio. In ogni spazio topologico X, l'applicazione identità

$$\mathrm{id}_X: X \to X, x \mapsto x,$$

è un omeomorfismo.

Definizione 2.9 – Gruppo degli omeomorfismi

L'insieme degli omeomorfismi su di uno spazio topologico X,

$$\mathrm{Hom}(X) = \{\, \varphi: X \to X \mid \varphi \text{ è un omeomorfismo} \,\},$$

è un gruppo rispetto alla composizione, detto *gruppo degli omeomorfismi.*

Osservazione. L'operazione di gruppo è ben definita, in quanto la composizione di applicazioni continue è anch'essa continua.

Definizione 2.10 – Spazi omeomorfi

Diciamo che due spazi topologici X ed Y, sono *omeomorfi* se esiste un omeomorfismo

$$\varphi: X \to Y.$$

Notazione. Due spazi omeomorfi si indicano con

$$X \approx Y.$$

Osservazione. Essere omeomorfi è una relazione di equivalenza fra spazi topologici.

Definizione 2.11 – Proprietà topologiche

Si definiscono *proprietà topologiche*, quelle proprietà di uno spazio topologico che vengono conservate dagli omeomorfismi.

Esempio. La connessione e la compattezza sono esempi di proprietà topologiche.

Esercizio. Si mostri che ogni palla aperta $B_r(x_0)$ di $\mathbb{R}^n$, è omeomorfa al disco standard di centro l'origine e raggio $1 : B_1(\bar{0})$.

Soluzione. É sufficiente comporre la traslazione $x \mapsto x + x_0$ con l'omotetia $x \mapsto r\,x$. Entrambe sono banalmente omeomorfismi, per cui $B_r(x_0) \approx B_1(\bar{0})$, tramite

$$\varphi : x \mapsto r\,x + x_0.$$

Esercizio. Si mostri che un intervallo aperto e limitato di $\mathbb{R}$, è omeomorfo a tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione. Per ogni intervallo aperto è sufficiente esibire un omeomorfismo appropriato, ad esempio, per l'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, possiamo considerare

$$\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, \vartheta \mapsto \tan\vartheta.$$

Osservazione. Dal precedente esercizio deduciamo che la limitatezza non è una proprietà topologica.

Osservazione. In generale ogni palla aperta di $\mathbb{R}^n$ è omeomorfa ad $\mathbb{R}^n$, ad esempio

$$F\colon B_1(\bar{0}) \to \mathbb{R}^n, x \mapsto \frac{x}{1 - \|x\|^2},$$

è un omeomorfismo.

Esercizio. Si mostri che la sfera unitaria $S^2 = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \|\bar{x}\| = 1 \right\}$, è omeomorfa al cubo di lato unitario $C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \max\{|x|, |y|, |z|\} = 1 \right\}$.

Soluzione. É sufficiente usare il seguente omeomorfismo

$$\varphi\colon C \to S, (x, y, z) \mapsto \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Osservazione. In generale vale anche in $\mathbb{R}^n$ tra il bordo di un aperto convesso e la sfera unitaria, tramite

$$\underline{x} \mapsto \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}.$$

Osservazione. Dal precedente esercizio deduciamo che avere spigoli non è una proprietà topologica.

Definizione 2.12 – Applicazione aperta

Un'applicazione $f\colon X \to Y$ tra spazi topologici si dice *aperta* se manda aperti in aperti, ovvero

$$f(A) \in T_Y, \; \forall\, A \in T_X.$$

Osservazione. Dalla definizione discende che un'applicazione continua e biiettiva, è un omeomorfismo se e soltanto se è aperta.

Esempio. Mostriamo che la terza proprietà degli omeomorfismi deve sempre essere verificata: consideriamo l'esponenziale complesso

$$\exp\colon [0,1) \to S^1 \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2, \vartheta \mapsto \exp^{2\pi i \vartheta}.$$

exp è banalmente biiettiva, inoltre è continua poichè le due componenti sono continue rispetto alla variabile ϑ. D'altronde exp non è un omeomorfismo, in quanto $\exp^{-1}$ non è continua. Infatti, preso $\varepsilon < 1$, si dimostra che $[0, \varepsilon)$ è un aperto di $[0,1)$, ma $\exp([0, \varepsilon))$, non è un aperto di S^1.

Definizione 2.13 – **Omeomorfismo locale**

Un'applicazione $f\colon X \to Y$ tra spazi topologici si definisce un *omeomorfismo locale* se, comunque preso $x \in X$, esiste un intorno U di x aperto in X, tale che

$$f|_U\colon U \to f(U),$$

è un omeomorfismo.

Esempio. Consideriamo

$$\exp\colon \mathbb{R} \to S^1, \vartheta \mapsto e^{2\pi i \vartheta},$$

che è banalmente suriettivo ma non iniettivo. Si dimostra facilmente che su intervalli aperti di ampiezza minore di 1, si ha l'iniettività di exp. Quindi exp è un omeomorfismo locale.

Esempio. L'applicazione

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2,$$

non è un omeomorfismo locale, in quanto non è iniettiva in nessun intorno dell'origine.

Proposizione 2.14 – **Omeomorfismo locale è aperta**

Sia $f\colon X \to Y$ un omeomorfismo locale. Allora f è un'applicazione aperta.

Dimostrazione. Sia A un aperto di X. Per ogni $x \in A$ definiamo U_x l'intorno aperto di x tale che

$$f|_{U_x}\colon U_x \to f(U_x),$$

è un omeomorfismo.
Ora A aperto in X implica che $U_x \cap A$ è aperto in U_x. Quindi $f|_{U_x}(U_x \cap A)$ è aperto in $f(U_x)$ e pertanto sarà aperto anche in Y. Infine

$$A = \bigcup_{x \in A} U_x \cap A \implies f(A) = \bigcup_{x \in A} f(U_x \cap A),$$

ovvero $f(A)$ è aperto Y in quanto unione di aperti. □

Proposizione 2.15 – Omeomorfismo è un omeomorfismo locale

Sia $f\colon X \to Y$ un omeomorfismo. Allora f è un omeomorfismo locale.

Dimostrazione. Segue banalmente dalla definizione di omeomorfismo. □

Proposizione 2.16 – Omeomorfismo locale biiettivo è un omeomorfismo

Sia $f\colon X \to Y$ un omeomorfismo locale. Allora f è un omeomorfismo se e soltanto se f è biiettiva.

Dimostrazione. Poichè abbiamo dimostrato che ogni omeomorfismo locale è aperto, supponendo che sia biiettivo, resta da dimostrare che è continuo. Sia quindi V un aperto di Y, vogliamo dimostrare che $f^{-1}(V)$ è aperto in X.
Se $f^{-1}(V) = \emptyset$ la tesi è banale, supponiamo quindi che $f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Prendiamo $x \in f^{-1}(V)$, per la definizione di omeomorfismo locale, esisterà un intorno aperto U_x di x tale che

$$f|_{U_x}\colon U_x \to f(U_x),$$

è un omemorfismo. In particolare $\left(f|_{U_x}\right)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap U_x$ è aperto in U_x, e quindi lo è anche in X. Quindi

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} f^{-1}(V) \cap U_x,$$

è aperto in X in quanto unione di aperti. □

3 VARIETÀ TOPOLOGICHE

3.1 INTRODUZIONE

Definizione 3.1 – Sottoinsieme complementare

Sia B un sottoinsieme dello spazio topologico X. Si definisce complementare di B la differenza insiemistica fra X e B, ovvero

$$B^c = X \setminus B.$$

Definizione 3.2 – Insieme chiuso

Un sottoinsieme C su uno spazio topologico X si definisce *chiuso* se C^c è un aperto.

Osservazione. Si può quindi definire una topologia a partire dai sottoinsiemi chiusi.

Osservazione. Per definizione $\emptyset$ e X sono insiemi chiusi.

Osservazione. Dire che un insieme è chiuso è diverso da dire che è non aperto, ad esempio, in $\mathbb{R}^2$, l'insieme rappresentato nella figura 3.1, non è nè chiuso nè aperto.

Proposizione 3.3 – Unione finita di chiusi

Unione finita di chiusi è un insieme chiuso.

Dimostrazione. Siano $C_1, \dots, C_n$ sottoinsiemi chiusi di X, dobbiamo dimostrare che il complementare dell'unione è un aperto:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} C_i^c,$$

che è aperto in quanto per le proprietà dello spazio topologico. □

Proposizione 3.4 – Intersezione qualsiasi di chiusi

Intersezione qualsiasi di chiusi è un insieme chiuso.

Dimostrazione. Analoga alla precedente. □

Esempio. Su $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea, gli intervalli $[a, b]$, $[a, +\infty)$ e $(-\infty, b]$, sono insiemi chiusi.

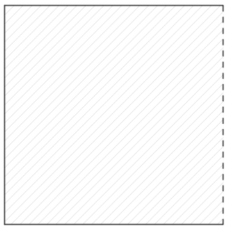

Figura 3.1: L'insieme contiene solo tre lati del quadrato

Esempio. In uno spazio metrico (X, d), i dischi chiusi

$$\overline{D_r(x)} = \{ d(y, x) \leqslant r \},$$

sono insiemi chiusi.

Esempio. Ogni sottoinsieme è chiuso in un insieme con la topologia discreta.

Definizione 3.5 – Applicazione chiusa

Un'applicazione $f\colon X \to Y$ tra spazi topologici si dice *chiusa* se manda chiusi in chiusi, ovvero

$$f(A)^c \in T_Y, \ \forall \ A^c \in T_X.$$

Osservazione. Un'applicazione $f\colon X \to Y$ tra spazi topologici è continua se e soltanto se la controimmagine di un chiuso è un chiuso

Osservazione. Un'applicazione $f\colon X \to Y$ tra spazi topologici, continua e biiettiva, è un omeomorfismo, se e soltanto se f è chiusa.

3.2 INTERIORI, ESTERIORI E BORDI

Con X faremo sempre riferimento ad un insieme dotato di una topologia T

Definizione 3.6 – Chiusura di un insieme

Sia B un sottoinsieme qualsiasi di X. Si definisce *chiusura* di B, l'intersezione di tutti i chiusi che contengono X, ovvero

$$\overline{B} = \bigcap \{ C \subset X \mid B \subset C, C \text{chiuso} \}.$$

Osservazione. $\overline{B}$ è il più piccolo chiuso che contiene B.

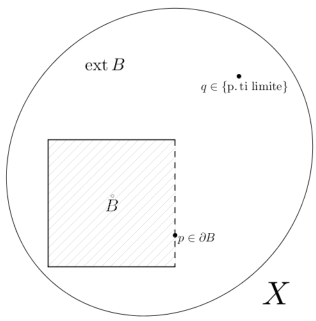

Figura 3.2: Un generico insieme in $\mathbb{R}^2$.

Definizione 3.7 – Interiore di un insieme

Sia B un sottoinsieme qualsiasi di B. Si definisce *interiore* di B, l'insieme di tutti gli aperti contenuti in B, ovvero

$$\mathring{B} = \bigcup \{\, A \subset X \mid A \subset B, A \text{ aperto} \,\}.$$

Osservazione. $\mathring{B}$ è il più grande aperto contenuto in B.

Osservazione. In generale vale

$$\mathring{B} \subseteq B \subseteq \overline{B},$$

dove l'uguaglianza vale se B è aperto nel primo caso e se B è chiuso nel secondo.

Definizione 3.8 – Esteriore di un insieme

Sia B un sottoinsieme qualsiasi di B. Si definisce *esteriore* di B il complementare della sua chiusura, ovvero

$$\text{ext}\, B = \overline{B}^{c} = X \setminus \overline{B}.$$

Osservazione. Per definizione, l'esteriore di un insieme è sempre aperto.

Definizione 3.9 – Bordo di un insieme

Sia B un sottoinsieme qualsiasi di B. Si definisce *bordo* di B il complementare dell'unione digiunta dell'interiore e dell'esteriore di B, ovvero

$$\partial B = \{\mathring{B} \sqcup \text{ext}\, B\}^{c} = X \setminus \{\mathring{B} \cup \text{ext}\, B\}.$$

Osservazione. Dal momento che l'interiore e l'eseteriore di B sono entrambi aperti, si avrà che ∂B è chiuso.

Osservazione. La figura 3.2 mostra un esempio di sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ e la sua suddivisione.

Lemma 3.10. Sia B un sottoinsieme di X, allora

$$X = \mathring{B} \sqcup \partial B \sqcup \operatorname{ext} B.$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione di ∂B. □

Lemma 3.11. Sia B un sottoinsieme di X, allora

$$p \in \mathring{B} \iff \exists\, U_p \in T : U_p \subseteq B.$$

Dimostrazione. Dal momento che $\mathring{B}$ è definito come l'unione degli aperti contenuti in B si ottiene facilmente la tesi. □

Lemma 3.12. Sia B un sottoinsieme di X, allora

$$p \in \operatorname{ext} B \iff \exists\, U_p \in T : U_p \cap B = \emptyset.$$

Dimostrazione. Dal momento che $\operatorname{ext} B$ è definito come il complementare della chiusura di B, avremo che, se $p \in \operatorname{ext} B$,

$$\begin{aligned} p \in \overline{B}^c &\iff p \in \Bigg(\bigcap_{\substack{C \text{ chiuso} \\ C \supset B}} C \Bigg)^c \\ &\iff p \in \bigcup_{\substack{C \text{ chiuso} \\ C \supset B}} C^c \\ &\iff p \in C^c, \end{aligned}$$

dove C è chiuso e contiene B, che implica C^c è aperto e disgiunto da B. Quindi

$$p \in C^c \in T, C^c \cap B = \emptyset.$$

Il viceversa si mostra in modo analogo. □

Lemma 3.13. Sia B un sottoinsieme di X, allora

$$p \in \partial B \iff \forall\, U_p \in T \implies U_p \cap B \neq \emptyset, U_p \cap B^c \neq \emptyset.$$

Dimostrazione. Segue dai due lemmi precedenti. □

Lemma 3.14. Sia B un sottoinsieme di X, allora

$$B \text{ aperto} \iff B = \mathring{B}.$$

Dimostrazione. Segue dal lemma 3.11. □

Lemma 3.15. Sia B un sottoinsieme di X, allora

$$B \text{ chiuso} \iff B = \overline{B} \iff \partial B \subset B.$$

Dimostrazione. La prima implicazione segue banalmente dalla definizione. Osserviamo che
$$\partial B = \{\mathring{B} \cup \operatorname{ext} B\}^c = \mathring{B}^c \cap \operatorname{ext} B^c,$$
ma $\operatorname{ext} B = \overline{B}^c$, per cui $\operatorname{ext} B^c = \overline{B}$. Quindi
$$\partial B = \mathring{B}^c \cap \overline{B} = \mathring{B}^c \cap B \subset B,$$
in quanto $\mathring{B} \subset B$. Il viceversa è analogo. □

Definizione 3.16 – Punto limite

Sia B un sottoinsieme qualsiasi di X. Un punto $q \in X$, si dice *punto limite*, o di *accomulazione*, per B, se ogni intorno di U_q contiene un punto di B distinto da q.

Osservazione. In generale, preso un sottoinsieme $B \subset X$, si ha che il bordo di B è distinto dall'insieme dei suoi punti limite. Infatti, se consideriamo
$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 \leqslant x < 3, 2 \leqslant y \leqslant 4 \right\},$$
mostrato sempre in figura 3.1, ed il punto $q = (6, 7)$, possiamo definire il sottoinsieme
$$B = \mathcal{R} \cup \{q\}.$$
In questo caso avremo che il bordo di B è costituito dai lati di $\mathcal{R}$ e il punto q. D'altronde, l'insieme dei punti limite di B sarà la chiusura di $\mathcal{R}$.

Esempio. Prendiamo $X = \mathbb{R}$. Avremo che l'insieme dei punti limite di $\mathbb{Z}$ è vuoto. Mentre l'insieme dei punti limite di $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ sarà $\{0\}$, che non è un elemento dell'insieme.

Definizione 3.17 – Sottoinsieme denso

Sia B un sottoinsieme qualsiasi di X. B si dice *denso* in X se la sua chiusura coincide con X.

Proprietà 3.18. Sia B un sottoinsieme di X, allora
$$B \subset X \text{ è denso} \iff \forall\, x \in X\, \exists\, x_n \in B : x_n \to x.$$

Proprietà 3.19. Sia B un sottoinsieme di X, allora
$$B \subset X \text{ è denso} \iff A \cap B \neq \emptyset, \forall\, A \in T.$$

Esempio. $\mathbb{Q}$ è un sottoinsieme denso in $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea.

Esempio. $\mathbb{Q}^n$ è un sottoinsieme denso in $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea.

Osservazione. Vedremo in seguito che sia $\mathbb{Q}$ che $\mathbb{Q}^n$ sono numerabili.

3.3 VARIETÀ TOPOLOGICHE

Definizione 3.20 – Spazio localmente euclideo

Uno spazio topologico X si definisce *localmente euclideo* di dimensione n, se ogni punto $p \in X$, possiede un intorno U_p tale che U_p è omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$.

Osservazione. In generale questa definizione implica che ogni intorno U_p è omeomorfo a tutto $\mathbb{R}^n$, infatti U_p è omeomorfo ad un disco $D_r(x)$ di $\mathbb{R}^n$, ma

$$D_r(x) \approx D_1(\bar{x}) \approx \mathbb{R}^n.$$

Definizione 3.21 – Spazio di Hausdorff

Uno spazio topologico X si dice *di Hausdorff*, o $T2$, se

$$\forall\, p, q \in X, \exists\, U_p, U_q : U_p \cap U_q = \emptyset.$$

Osservazione. Uno spazio di Hausdorff, che si dice anche spazio separato, ci dice che esistono abbastanza aperti affinchè ogni punto sia separato dagli altri.

Osservazione. Ogni spazio metrico è di Hausdorff, infatti, presi $x, y \in X$, se fissiamo $d = d(x, y)$, avremo

$$B_{\frac{d}{2}}(x) \cap B_{\frac{d}{2}}(y) = \emptyset.$$

Esempio. Sia $X = \{1, 2, 3\}$ su cui definiamo la topologia $T = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$. Lo spazio topologico (X, T) non è di Hausdorff, infatti ogni intorno di 2 contiene anche 3.

Proposizione 3.22 – Proprietà degli spazi di Hausdorff

Sia X uno spazio di Hausdorff, allora

- Ogni punto p costituisce un sottoinsieme chiuso.
- Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione convergente, allora

  $$\lim_{n\to+\infty} x_n = x,$$

  è unico.

Dimostrazione.
- Sia $p \in X$, vogliamo mostrare che $\{p\}^c$ è aperto, ma

  $$\{p\}^c = X \setminus \{p\} \implies q \in \{p\}^c, \forall\, q \neq p,$$

  quindi, per la definizione di spazio di Hausdorff, esisterà un intorno U_q tale che $p \notin U_q$, ovvero

  $$\{p\}^c = \{\mathring{p}\}^c,$$

  per cui $\{p\}^c$ è aperto.

- Supponiamo per assurdo che esistano x, y tali che
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \neq y = \lim_{n\to+\infty} x_n,$$
per Hausdorff avremo che esistono due intorni U_x, U_y tali che
$$U_x \cap U_y = \emptyset,$$
ma ciò è assurdo in quanto
$$x_n \to x \implies \exists\, N > 0 : x_n \in U_y, \forall\, n > N,$$
ma
$$x_n \to x \implies \exists\, N' > 0 : x_n \in U_x, \forall\, n > N',$$
ovvero
$$U_x \cap U_y \neq \emptyset.$$

□

Definizione 3.23 – Varietà topologica

Uno spazio topologico (M, T) si dice *varietà topologica* di dimensione n, se soddisfa

1. (M, T) è localmente euclideo di dimensione n.
2. (M, T) è uno spazio di Hausdorff.
3. (M, T) ammette una base numerabile $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Esempio. $\mathbb{R}^n$ rispetto alla topologia standard è una varietà topologica, infatti

1. Banalmente verificato.
2. Vero poichè con la topologia standard $\mathbb{R}^n$ è uno spazio metrico.
3. Basta prendere $\mathcal{B} = \{B_r(\bar{q})\}_{\mathbb{Q}^{n+1}}$, con $\bar{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}^n$ e $r \in \mathbb{Q}$.

Notazione. Da questo momento potremmo utilizzare la seguente notazione:

- T_2 per gli spazi di Hausdorff, per indicare la validità del secondo assioma di separazione.
- N_2 per gli spazi a base numerabile, per indicare la validità del secondo assioma di numerabilità.

Definizione 3.24 – Ricoprimento aperto

Sia X uno spazio topologico. Si definisce *ricoprimento aperto* di X una famiglia di aperti $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ tale che
$$X = \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Esempio. In $\mathbb{R}^2$ le palle di centro l'origine e raggio $n \in \mathbb{N}$ sono un ricoprimento di

$\mathbb{R}^2$, infatti
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n(\bar{0}) = \mathbb{R}^2.$$

Proposizione 3.25 – Ricoprimenti aperti per spazi N_2

Sia X uno spazio topologico a base numerabile. Allora ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento numerabile.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ un arbitrario ricoprimento aperto di X. Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile di X, quindi

ovvero I non è necessariamente numerabile

$$\forall\, A_i\, \exists\, B_i' \in \mathcal{B} : B_i' \subseteq A_i,$$

quindi
$$\mathcal{B} = \{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}.$$

Consideriamo ora il sottoricoprimento $\mathcal{A}' = \{B_i'\}_{i\in I'}$ con $I' \subset \mathbb{N}$ numerabile. Resta quindi da mostrare che $\mathcal{A}'$ costituisce effettivamente un ricoprimento, ovvero che
$$X = \bigcup_{i\in I'} B_i'.$$

Ora, dal momento che $\mathcal{A}$ costituisce un ricoprimento, preso un qualsiasi $x_i \in X$, esisterà $A_{i_0} \in \mathcal{A}$ tale che $x \in A_{i_0}$. Ma $\mathcal{B}$ è una base, per cui A_{i_0} è unione di elementi di $\mathcal{B}$, ovvero
$$\exists\, B_{i_0}' : x \in B_{i_0}'.$$
□

Proposizione 3.26 – $\mathbb{R}^n$ è a base numerabile

Consideriamo $\mathbb{R}^n$ dotato della topologia euclidea. Allora $\mathbb{R}^n$ è a base numerabile.

Dimostrazione. Preso $x \in \mathbb{R}^n$ e comunque preso un intorno A_x di x, esisterà un disco centrato in x di raggio $r \in \mathbb{Q}$ contenuto in A_x. Questo è vero poichè posso approssimare ogni reale con una successione di razionali, cioè i dischi aperti di raggio razionale costituiscono una base numerabile per gli intorni di $x \in \mathbb{R}^n$.

si riferisce al primo assioma di numerabilità N_1

Per ottenere una base numerabile di tutto $\mathbb{R}^n$, ovvero che soddisfi N_2, basta considerare i dischi aperti $D_r(\bar{q})$, dove $\bar{q} \in \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{Q}$, ovvero la famiglia
$$\{D_r(\bar{q})\}_{(r,\bar{q})\in\mathbb{Q}^{n+1}},$$
che è proprio un ricoprimento aperto e numerabile di $\mathbb{R}^n$ poichè
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n\, \exists\, \bar{q}_k \to x.$$
Ed è pertanto una base per la caratterizzazione 1.15. □

Osservazione. Ogni spazio metrico (X, d) soddisfa il primo assioma di numerabilità N_1.

Osservazione. Ogni spazio metrico (X, d) è a base numerabile se e soltanto se contiene un sottoinsieme denso numerabile.

4 NUOVI SPAZI TOPOLOGICI

4.1 SOTTOSPAZI

Definizione 4.1 – Topologia indotta

Sia X uno spazio topologico e sia B un sottoinsieme qualsiasi di X. La *topologia indotta* su B dalla topologia su X è la seguente:

$$U \text{ aperto di } B \iff \exists\, V \text{ aperto di } X : U = B \cap V.$$

Definizione 4.2 – Sottospazio topologico

Sia X uno spazio topologico e sia B un sottoinsieme qualsiasi di X. B si definisce *sottospazio* di X se dotato della topologia indotta.

Osservazione. Un sottospazio è banalmente uno spazio topologico, infatti

- Se U_1, U_2 sono aperti di B avremo che $U_1 = B \cap V_1, U_2 = B \cap V_2$, dove V_1, V_2 sono aperti di X, per cui

  $$U_1 \cup U_2 = (B \cap V_1) \cup (B \cap V_2) = B \cap (V_1 \cup V_2),$$

  dove $V_1 \cup V_2$ è un aperto di X in quanto unione di aperti. Per cui dalla definizione $U_1 \cap U_2$ è un aperto di B.

- Analogamente a prima avremo

  $$U_1 \cap U_2 = (B \cap V_1) \cap (B \cap V_2) = B \cap (V_1 \cap V_2),$$

  dove $V_1 \cap V_2$ è un aperto di X in quanto intersezione di aperti.

- Ovviamente B e $\emptyset$ sono aperti di B in quanto

  $$B = B \cap X,$$

  dove X è ovviamente aperto, e

  $$\emptyset = B \cap \emptyset.$$

Osservazione. Sia (X, d) uno spazio metrico dotato della topologia indotta da d e sia B un sottoinsieme di X. Avremo che la distanza ristretta $d_B : B \times B \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ definisce una distanza su d. Allora (B, d_B) è omeomorfo a B dotato della topologia di sottospazio.

Esempio. Consideriamo il sottoinsieme $B = [-1, 2] \cup (3, 4) \subset \mathbb{R}$. Si dimostri che $[-1, 2]$ è aperto di B, dotato della topologia di sottospazio.

Soluzione. Per definizione dobbiamo scrivere $[-1, 2]$ come intersezione di B e un aperto di $\mathbb{R}$, quindi basta scrivere

$$[-1,2] = B \cap (-2,3),$$

dove $-2, 3$ è ovviamente un aperto di $\mathbb{R}$.

Esempio. In $\mathbb{R}$ si consideri la successione convergente $C = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. Consideriamo C come sottospazio di $\mathbb{R}$, si dica se:

- C è uno spazio topologico discreto.
- L'origine è un elemento di C.

Soluzione.

- Un generico elemento di C è del tipo $\frac{1}{n}$, mi basta quindi dimostrare che esiste un aperto in C che contiene solamente $\frac{1}{n}$. Mi basta quindi

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left(\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon\right) \cap C,$$

dove ε è un valore sufficientemente piccolo, in particolare

$$\varepsilon < d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n}.$$

- No, poichè $0 \neq \frac{1}{n}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Esempio. Consideriamo l'applicazione

$$\exp\colon [0, 2\pi) \to S^1 \subset \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}, \vartheta \mapsto e^{i\vartheta} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta).$$

Si dica se exp costituisce un omeomorfismo.

Soluzione. Per l'analisi sappiamo che exp è continua, inoltre risulta iniettiva su $[0, 2\pi)$ in quanto funzione periodica di periodo pari proprio a 2π. Infine exp è banalmente suriettiva su S^1.

Resterebbe da verificare se è aperta nelle topologie di sottospazi $[0, 2\pi) \subset \mathbb{R}, S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Ma si mostra facilmente che non lo è, infatti, consideriamo $[0, \pi/2)$ che è aperto in $[0, 2\pi)$ in quanto $[0, \pi/2) = [0, 2\pi) \cap (-1, \pi/2)$. Avremo che l'immagine $\exp([0, \pi/2))$ non è aperta in S^1 in quanto il punto $(1, 0)$ non appartiene all'interiore di S^1.

Definizione 4.3 – Embedding topologico

Sia X uno spazio topologico e sia A un sottoinsieme di X. Un *embedding* topologico è un'applicazione continua e iniettiva

$$f\colon A \hookrightarrow X,$$

che è omeomorfismo sull'immagine $f(A)$.

Osservazione. Un'applicazione iniettiva è ovviamente biettiva sull'immagine.

Teorema 4.4 – Proprietà universale della topologia di sottospazi

Sia $B \subset X$ un sottospazio topologico. Sia Y uno spazio topologico qualsiasi. Allora

$$f\colon Y \to B,$$

è continua se e soltanto se la composizione

$$Y \xrightarrow{f} B \xhookrightarrow{i} X,$$

è continua.

Dimostrazione. f è continua se e soltanto se $f^{-1}(U)$ è aperto in Y per ogni U aperto di B. Ma U è aperto in B se e solo se, per definizione, $U = B \cap V$, dove V è un aperto di X. Quindi

$$U = i^{-1}(V) \implies f^{-1}(U) = \left(i \circ f\right)^{-1}(V),$$

ovvero $f^{-1}(U)$ è un aperto di Y se e solo se $i \circ f$ è continua □

Osservazione. La topologia di sottospazio è l'unica che soddisfa questa proprietà universale.

Preso $B \subset X$ un sottospazio topologico di X, valgono le seguenti proprietà:

Proprietà 4.5. L'inclusione

$$i\colon B \hookrightarrow X,$$

è un embedding.

Proprietà 4.6. Se $f\colon X \to Y$ è continua, allora la restrizione

$$f|_B\colon B \to Y,$$

è continua.

Proprietà 4.7. Se $f\colon X \to Y$ è continua, allora la restrizione sull'immagine

$$f|_B\colon B \to f(B),$$

è continua e suriettiva.

Proprietà 4.8. I chiusi di B sono precisamente le intersezioni con i chiusi di X.

Proprietà 4.9. Se $\mathcal{B}$ è una base di X, allora

$$\mathcal{B}_B = \{\, B \cap U : U \in \mathcal{B} \,\},$$

è base di B.

Proprietà 4.10. Se X è uno spazio di Hausdorff, allora lo è anche B.

Proprietà 4.11. Se X è a base numerabile, allora lo è anche B.

Proposizione 4.12 – Grafico omeomorfo al dominio dell'applicazione

Presa un'applicazione continua $f\colon U \to \mathbb{R}^k, U$ aperto di $\mathbb{R}^n$. Allora il grafico

$$\Gamma_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \;\middle|\; x \in U, y = f(x) \in \mathbb{R}^k \right\},$$

è un sottospazio di R^{n+k} omeomorfo a U aperto di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Per la proprietà 4.7 l'applicazione $\varphi_f\colon U \to \Gamma_f$ è continua e suriettiva. D'altronde φ_f è anche iniettiva, in quanto mappa $x \mapsto \big(x, y = f(x)\big)$, con inversa

$$\varphi_f^{-1}\colon \Gamma_f \to U, (x, y) \mapsto x,$$

che è continua in quanto restrizione dell'applicazione continua

$$\mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto x. \qquad \square$$

Esempio. Si dimostri che

$$V = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = |x| \right\},$$

è omeomorfo a $\mathbb{R}$.

Soluzione. Per definizione avremo $V = \Gamma_{|x|}$, dove

$$|x|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

per la proposizione precedente V è omeomorfo al dominio di $|x|$ che nel nostro caso $\mathbb{R}$. Quindi

$$V \approx \mathbb{R}.$$

Esercizio (per casa)**.** Si dimostri che un aperto di $\mathbb{R}^n$ è omeomorfo ad una varietà topologica T_f di dimensione n.

Osservazione. Quindi uno spazio topologico che è localmente il grafico di una funzione continua, è localmente euclideo.

Proposizione 4.13 – Sfere come varietà topologiche

La sfera unitaria di dimensione n

$$S^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \|x\|^2 = 1 \right\},$$

è una varietà topologica di dimensione n.

Dimostrazione. Dal momento che $\mathbb{R}^{n+1}$ è uno spazio di Hausdorff a base numerabile, per le proprietà 4.10 e 4.11, lo è anche S^n. Per concludere resta da dimostrare che S^n è localmente euclideo, ma ciò segue dal fatto che S^n è localmente il grafico di un'applicazione

$U \subset \mathbb{R}^n \to S^n$. Infatti, per definizione $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n$ quando $\|x\|^2 = 1$, per cui

$$\exists\, i \in \{1, \dots, n+1\} : x_i \neq 0,$$

ovvero

$$x_i = \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - \hat{x}_i^2 - \dots - x_{n+1}^2} = f(x_1, \dots, \hat{x}_i^2, \dots x_{n+1}),$$

che è una funzione continua $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Per cui, in un intorno di $x \in S^n$, avremo che S^n è il grafico di f. Ovvero S^n è è localmente euclideo essendo localmente omeomorfo ad $\mathbb{R}^n$ per la proposizione 4.12. □

Esempio. Si dimostri che

$$S^1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \},$$

è una varietà topologica di dimensione 1.

Soluzione. Ripercorriamo la dimostrazione della proposizione precedente: S^1 è di Hausdorff e a base numerabile in quanto lo è $\mathbb{R}^2$. Inoltre è localmente euclideo, ovvero esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{A} = \{ A \}_{i \in I}$ tale che

$$S^1 = \bigcup_{i \in I} A_i \qquad \text{e} \qquad A_i \approx \mathbb{R}.$$

Questo poichè, nel semicerchio superiore A_1, S^1 è il grafico di $y = \sqrt{1 - x^2}$ che è omeomorfo al dominio $(-1, 1)$. Analogamente, nel semicerchio inferiore A_2, S^1 è il grafico di $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Per includere in punti con $y = 0$ ci basta considerare il semicerchio destro A_3 e sinistro A_4, rispettivamente grafici di

$$x = \sqrt{1 - y^2} \qquad \text{e} \qquad x = -\sqrt{1 - y^2}.$$

Avremo quindi $S^1 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, pertanto S^1 è localmente euclideo in quanto

$$A_i \approx (-1, 1) \approx \mathbb{R}.$$

Proposizione 4.14 – Funzioni definite a tratti

Sia X uno spazio topologico che può essere scritto come unione finita di insiemi chiusi

$$X = C_1 \cup \dots \cup C_k.$$

Allora, comunque preso i, esiste un'applicazione continua $f_i \colon C_i \to Y$ tale che

$$f_i|_{C_i \cap C_j} = f_j|_{C_i \cap C_j},$$

se e soltanto se esiste un'unica funzione continua $f \colon X \to Y$, tale che

$$f|_{C_i} = f_i.$$

Esempio. Su $\mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup [0, +\infty)$, consideriamo ad esempio

$$|x| \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

avremo quindi

$$f_1 \colon (-\infty, 0] \to \mathbb{R}^+, x \mapsto -x \qquad \text{e} \qquad f_2 \colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}^+, x \mapsto x,$$

con $f_1(0) = f_2(0) = 0$ e

$$f|_{(-\infty,0]} = f_1 \qquad f|_{[0,+\infty)} = f_2.$$

4.2 SPAZI PRODOTTO

Definizione 4.15 – Topologia prodotto

Dati n spazi topologici $X_1, \dots, X_n$, la *topologia prodotto* sul prodotto cartesiano

$$X_1 \times \dots \times X_n$$

è definita dalla seguente base

$$\mathcal{B} = \{ (U_1 \times \dots \times U_n) \mid U_i \in T_i, \forall\, i \in \{1, \dots, n\} \}.$$

Osservazione. Naturalmente è sufficiente considerare tutte le combinazioni di aperti delle rispettive basi.

Esempio. Consideriamo $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topologia prodotto. La base di $\mathbb{R}^2$ sarà dunque l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ che sono prodotto di aperti in $\mathbb{R}$. Quindi, per la caratterizzazione degli aperti in $\mathbb{R}$, tali sottoinsiemi saranno tutti i prodotti

$$(a, b) \times (c, d),$$

di intervalli aperti di $\mathbb{R}$. Pertanto la base di $\mathbb{R}^2$ è costituita dai rettangoli aperti, i quali avevamo osservato identificano la stessa base di $\mathbb{R}^2$ definita dai dischi.

Definizione 4.16 – Spazio prodotto

Dati n spazi topologici $X_1, \dots, X_n$, si definisce *spazio prodotto*, il prodotto cartesiano

$$X_1 \times \dots \times X_n,$$

con la topologia prodotto.

Proposizione 4.17 – Proiezioni di spazi prodotto sono continue

Sia $X = X_1 \times \dots \times X_n$ uno spazio prodotto. Allora le proiezioni

$$\pi_i \colon X \to X_i, (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \mapsto x_i,$$

sono tutte continue, suriettive e aperte.

Dimostrazione. Basta dimostrarlo per $n = 2$, infatti, se risultasse vero per $X_1 \times X_2$ si potrebbe estendere ad $X_1 \times X_2 \times X_3$ semplicemente ridefinendo $Y_1 = X_1 \times X_2$, ovvero

$$X_1 \times X_2 \times X_3 = (X_1 \times X_2) \times X_3 = Y_1 \times X_3.$$

Dimostriamolo quindi per $n = 2$:

- La suriettività è vera per definizione.
- Preso U_1 aperto di X_1, avremo che

$$\pi_1^{-1}(U_1) = U_1 \times X_2,$$

che è un aperto del prodotto in quanto X_2 è per definizione un aperto di X_2, mentre U_1 è aperto di X_1 per ipotesi.

- Per dimostrare che π_i è aperto, è sufficiente mostrarlo per gli aperti della base, infatti
$$\pi_1(U_1 \times U_2) = U_1,$$
che è aperto di X_1, analogamente
$$\pi_2(U_1 \times U_2) = U_2,$$
che è aperto di X_2. □

Teorema 4.18 – Proprietà universale della topologia prodotto

Sia $X_1 \times \ldots \times X_n$ un prodotto topologico e sia $\pi_i \colon X_1 \times \ldots \times X_n \to X_i$ la proiezione su ciascuna componente. Allora un'applicazione
$$f \colon Y \to X_1 \times \ldots \times X_n,$$
è continua se e soltanto se $\pi_i \circ f$ è continua $\forall\ i = 1, \ldots, n$.

Dimostrazione. Come abbiamo già osservato in precedenza, è sufficiente dimostrare una proposizione su spazi topologici nel caso $n = 2$. Consideriamo quindi il caso $X \times Z$ con $X = X_1$ e $Z = X_2 \times \ldots \times X_n$.
Per la continuità è sufficiente verificarla su una base, nel caso specifico della topologia prodotto su
$$\mathcal{B} = \{\, U \times V \mid U \in T_X, V \in T_Z \,\}.$$
$\Leftarrow)$ Per definizione f è continua se e soltanto se $f^{-1}(U \times V)$ è aperta in Y. Ma, per ipotesi,
$$\left(\pi_X \circ f\right)^{-1}(U) = f^{-1}\left(\pi_X^{-1}(U)\right) = f^{-1}(U \times Z),$$
è un aperto di Y. Analogamente
$$\left(\pi_Z \circ f\right)^{-1}(V) = f^{-1}\left(\pi_Z^{-1}(V)\right) = f^{-1}(X \times V),$$
che è ancora un aperto di Y. Osserviamo infine che
$$f^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U \times Z) \cap f^{-1}(X \times V),$$
che è quindi aperta in quanto intersezione di aperti.
$\Rightarrow)$ Supponiamo che f sia continua, per cui ogni controimmagine di un elemento della base è aperto in Y. Siano U, V rispettivamente aperti di X e Z, avremo
$$\left(\pi_X \circ f\right)^{-1}(U) = f^{-1}\left(\pi_X^{-1}(U)\right) = f^{-1}(U \times Z),$$
$$\left(\pi_Z \circ f\right)^{-1}(V) = f^{-1}\left(\pi_Z^{-1}(V)\right) = f^{-1}(X \times V),$$
che sono entrambi aperti in Y in quanto controimmagini di elementi della base. □

Corollario. Un'applicazione
$$F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(f_1(\bar{x}), \ldots, f_n(\bar{x})\right),$$
è continua se e soltanto se ogni sua componente f_i è continua.

Dimostrazione. Segue banalmente dalla proprietà universale, infatti
$$f_i = \pi_i \circ f.$$
□

Proposizione 4.19 – Unicità della topologia prodotto

Siano $X_1, \dots, X_n$ spazi topologici. Allora la topologia prodotto su $X_1 \times \dots \times X_n$ è l'unica che soddisfa la proprietà universale.

Dimostrazione. □

Proprietà 4.20. La topologia prodotto è associativa, ovvero
$$X \times Y \times Z \approx (X \times Y) \times Z \approx X \times (Y \times Z).$$

Proprietà 4.21. Comunque preso $y_0 \in Y$, l'inclusione
$$i \colon X \hookrightarrow X \times Y, x \mapsto (x, y_0),$$
è un embedding.

Proprietà 4.22. Se X, Y sono spazi di Hausdorff, allora
$$X \times Y,$$
è uno spazio di Hausdorff.

Proprietà 4.23. Se X, Y sono spazi a base numerabile, allora
$$X \times Y,$$
è uno spazio a base numerabile.

Proposizione 4.24 – Somma e prodotto di applicazioni continue

Siano $f, g \colon X \to K$ applicazioni da uno spazio topologico in un gruppo (o campo) topologico, allora
$$f + g \qquad \text{e} \qquad f \cdot g,$$
sono applicazioni continue.

Dimostrazione. K è uno spazio topologico, quindi per la proprietà universale, $f, g \colon X \to K$ sono continue se e soltanto se
$$X \to K \times K, x \mapsto \big(f(x), g(x)\big),$$
è continua. Inoltre
$$+ \colon K \times K \to K, (a, b) \mapsto a + b,$$
$$\cdot \colon K \times K \to K, (a, b) \mapsto a\, b,$$
sono applicazione continue. Quindi $f + g$ e $f \cdot g$ sono continue in quanto composizione di applicazioni continue. □

Proposizione 4.25 – Prodotto di varietà topologiche

Siano M e N due varietà topologiche rispettivamente di dimensione m e n. Allora $M \times N$ è una varietà topologica di dimensione $m+n$.

Dimostrazione. Per le proprietà 4.22 e 4.23 sappiamo che $M \times N$ è uno spazio di Hausdorff a base numerabile.
Resta da mostrare che è localmente omeomorfo ad $\mathbb{R}^{m+n}$. Consideriamo quindi la base

$$\mathcal{B} = \{ U \times V \mid U \in M, V \in N \},$$

sappiamo, per definizione di varietà topologica, che $U \approx \mathbb{R}^m$ e $V \approx \mathbb{R}^n$, quindi

$$U \times V \approx \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^{m+n}. \qquad \square$$

Esempio. Dimostriamo che la ciambella, o toro, è omeomorfa al prodotto topologico di due cerchi.
Osserviamo che il toro corrisponde graficamente alla superficie di rotazione che si ottiene ruotando un cerchio di centro $(a, 0)$ e raggio $r < a$ attorno all'asse z.
Costruiamo quindi un esempio numerico prendendo un cerchio di raggio $r = 1$ e centro $(2, 0)$. Avremo quindi le seguenti equazioni parametriche:

$$(y-2)^2 + z^2 = 1 : \begin{cases} x = 2 + \cos\vartheta \\ y = \sin\vartheta \end{cases}$$

4.3 SPAZI QUOZIENTE

Definizione 4.26 – Topologia quoziente

Sia $\pi \colon X \twoheadrightarrow Y$ un'applicazione suriettiva con X spazio topologico. Si definisce la *topologia quoziente* su Y come segue:

$$V \text{ è aperto in } Y \iff \pi^{-1}(V) \text{ è aperto in } X.$$

Osservazione. La stessa definizione vale anche per i chiusi.

Definizione 4.27 – Spazio quoziente

Sia $\pi \colon X \twoheadrightarrow Y$ un'applicazione suriettiva con X spazio topologico. Y si definisce *spazio quoziente* se dotato della topologia di sottospazio.

Notazione. Per indicare che Y è uno spazio quoziente su X scriveremo

$$Y = \frac{X}{\sim}$$

Dove $\sim$ indica la seguente relazione di equivalenza

$$x_1 \sim x_2 \iff \pi(x_1) = \pi(x_2).$$

Definizione 4.28 – Fibra di un punto

Sia $Y = X/\sim$ uno spazio quoziente e sia $x_0 \in Y$. Definiamo *fibra* di x_0 l'insieme di tutti i punti di X che hanno come immagine x_0, ovvero

$$\pi^{-1}(x_0).$$

Osservazione. Per definizione, se $x_1 \sim x_2$ diremo che x_1, x_2 appartengono alla stessa fibra.

Esempio. Consideriamo la proiezione $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$. La fibra del generico punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è la retta verticale (x_0, y).

Definizione 4.29 – Applicazione quoziente

Un'applicazione tra spazi topologici $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ suriettiva, si dice *applicazione quoziente* se gode della proprietà della topologia quoziente.

Osservazione. Un'applicazione quoziente è automaticamente continua.

Osservazione. Un'applicazione quoziente $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ definisce una partizione di X in fibre, ovvero classi di equivalenza.

Esempio. Ogni proiezione è un'applicazione quoziente.

Definizione 4.30 – Insieme saturo

Sia $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ un'applicazione quoziente. $U \subset X$ si dice *saturo* se

$$U = \pi^{-1}\big(\pi(U)\big).$$

Osservazione. Ogni fibra è un insieme saturo, mentre ogni saturo è insieme di fibre.

Esempio. Consideriamo nuovamente la proiezione $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$. Gli insiemi saturi saranno "strisce verticali", ovvero unione di rette verticali. Ad esempio

$$\big([1, 2] \cup \{3\} \cup [4, 5]\big) \times \mathbb{R},$$

è un saturo di $\mathbb{R}^2$, mentre il rettangolo $(-1, 3] \times [-2, 5]$ non lo è.

Proposizione 4.31 – Caratterizzazione delle applicazioni quoziente

Un'applicazione continua e suriettiva $\pi\colon X \twoheadrightarrow Y$ è un'applicazione quoziente se e soltanto se le immagini di aperti saturi di X tramite π sono aperti di Y.

$\Rightarrow)$ *Dimostrazione.* Sia U un aperto saturo, dobbiamo mostrare che $\pi(U)$ è aperto in Y. Nella topologia quoziente questo è vero se e soltanto se $\pi^{-1}(\pi(U))$ è aperto in X, ma per definizione di saturo $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$ che è aperto in X per ipotesi.

$\Leftarrow)$ Viceversa, supponiamo che π sia un'applicazione continua che manda aperti saturi in aperti, dobbiamo mostrare che π è un'applicazione quoziente, ovvero che V è aperto di Y se e soltanto se $\pi^{-1}(V)$ è aperto di X. Per ipotesi π è continua, quindi V aperto di Y implica $\pi^{-1}(V)$ aperto di X. Supponiamo quindi che $\pi^{-1}(V)$ sia un aperto di X, avremo che $\pi^{-1}(V)$ è un aperto saturo, in quanto

$$\pi^{-1}\Big(\pi(\pi^{-1}(V))\Big) = \pi^{-1}(V).$$

Per cui $\pi^{-1}(V)$ è un aperto di Y in quanto π manda aperti saturi in aperti. □

Esempio. Preso $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, che sappiamo essere un sottospazio topologico, vogliamo dimostrare che è anche uno spazio quoziente, definito dall'applicazione esponenziale

$$\exp\colon [0,1] \to S^1 \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}, \vartheta \mapsto 2^{2\pi i \vartheta} = \big(\cos(2\pi\vartheta), \sin(2\pi\vartheta)\big).$$

Per la caratterizzazione dobbiamo dimostrare che V è un aperto di S^1 se e soltanto se $\exp^{-1}(V)$ è un aperto di $[0,1]$. Naturalmente basta dimostrarlo per una base di S^1, ad esempio la famiglia degli archetti aperti.

- Supponiamo che $(1,0) \notin V$, siccome V è piccolo possiamo supporre

  $$\exp^{-1}(V) = (\vartheta - \varepsilon, \vartheta + \varepsilon),$$

  che è ovviamente aperto in $[0,1]$.

- Viceversa, supponiamo che $(1,0) \in V$, in tal caso avremo, per via della non iniettività del punto $(1,0)$,

  $$\exp^{-1}(V) = [0,\varepsilon) \sqcup (1-\varepsilon, 1],$$

  che è nuovamente un aperto di $[0,1]$.

Quindi

$$S^1 = \frac{[0,1]}{0 \sim 1}$$

dove $0 \sim 1$ sta ad indicare una relazione di equivalenza che identifica i punti 0 ed 1.

Osservazione. Avendo già osservato che la relazione di equivalenza identifica solo i punti 0 ed 1, la fibra del generico $x_0 \neq (1,0)$ sarà l'unico punto di $[0,1]$ avente x_0 come immagine, mentre la fibra di $(1,0)$ sarà $\{0,1\}$.

Osservazione. exp non è un'applicazione aperta, infatti $\exp\big([0,\varepsilon)\big)$ non è un aperto di S^1 in quanto $(1,0) \in \exp\big([0,\varepsilon)\big)$ che non è un suo punto interno.

Osservazione. Tramite l'applicazione

$$\exp\colon \mathbb{R} \to S^1, \vartheta \mapsto e^{2\pi i \vartheta},$$

si può dimostrare che vale

$$S^1 = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$$

dove $\mathbb{Z}$ indica una relazione di equivalenza che identifica tutti i punti di $\mathbb{R}$ avente distanza reciproca intera, ovvero

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}.$$

Teorema 4.32 – Proprietà universale della topologia quoziente

Sia $\pi \colon X \twoheadrightarrow Y$ un'applicazione quoziente. Per ogni spazio topologico B, un'applicazione $f \colon Y \to B$ è continua se e soltanto se $f \circ \pi$ è continua.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia continua, π è continua in quanto applicazione quoziente. Quindi $f \circ \pi$ è continua in quanto composizione di applicazioni continue. $\Rightarrow)$
Sia V un aperto di B. Per la continuità di $f \circ \pi$ avremo che $(f \circ \pi)^{-1}(V)$ è aperto in X, ma $\Leftarrow)$

$$(f \circ \pi)^{-1}(V) = \pi^{-1}\left(f^{-1}(V)\right),$$

e per definizione di applicazione quoziente $\pi^{-1}\left(f^{-1}(V)\right)$ è un aperto di X se e soltanto se $f^{-1}(V)$ è un aperto di Y, per cui f è continua. □

Corollario (Passaggio al quoziente)**.** Sia $\pi \colon X \twoheadrightarrow Y$ un'applicazione quoziente e, per ogni spazio topologico B, sia $g \colon X \to B$ un'applicazione continua costante sulle fibre di π, ovvero tale che

$$\forall\, p, q \in X : \pi(p) = \pi(q) \implies g(p) = g(q).$$

Allora si dice che g passa al quoziente, cioè che esiste un'unica applicazione continua $\bar{g} \colon Y \to B$ tale che $g \circ \pi = \bar{g}$, ovvero che il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, two heads, "\pi"'] \arrow[dr, "g"] & \\
Y \arrow[r, dashed, "\bar{g}"'] & B
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Per ogni $y \in Y$ definiamo $\bar{g}(y) = g(p)$ per un qualsiasi $p \in \pi^{-1}(y)$. Otteniamo così una ben definita applicazione in quanto, se $p_1, p_2 \in \pi^{-1}(y)$, avremo $g(p_1) = g(p_2) = \bar{g}(y)$. Dalle ipotesi su $\bar{g}$ ne segue anche la sua unicità. Infine la continuità di $\bar{g}$ segue banalmente dalla proprietà universale, in quanto $\bar{g} = g \circ \pi$. □

Osservazione. Riassumendo, se $\pi \colon X \twoheadrightarrow Y$ è un'applicazione quoziente, esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme della applicazione continue con dominio X e le applicazioni continue con dominio X che sono costanti sulle fibre di π.

Esempio. Mostriamo che $\sin x$ è continua su S^1.
Poniamo $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$ che sappiamo essere una funzione continua per l'analisi, e consideriamo l'applicazione quoziente

$$\exp \colon \mathbb{R} \to S^1, x \mapsto e^{ix}.$$

Osserviamo che f è un'applicazione periodica di periodo 2π, che si verifica facilmente essere costante sulle fibre di exp. Infatti, presi $p, q \in \mathbb{R}$ tali che $\exp(p) = \exp(q)$, avremo

$$\begin{aligned}\exp(p) = \exp(q) &\iff (\cos p, \sin p) = (\cos q, \sin q)\\ &\iff \begin{cases}\cos p = \cos q\\ \sin p = \sin q\end{cases}\\ &\iff x - y = 2k\pi,\end{aligned}$$

che corrispondono proprio alle fibre di exp. Possiamo quindi definire

$$\bar{f}\colon S^1 \to \mathbb{R}, \vartheta \mapsto f\big(\exp^{-1}(\vartheta)\big),$$

che è ben definita e continua su S^1 per il passaggio al quoziente.

Osservazione. In generale le funzioni continue su archi $\bar{f}\colon S^1 \to \mathbb{R}$ sono in corrispondenza biunivoca con le funzioni periodiche e continue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

4.4 AZIONI DI GRUPPI

Definizione 4.33 – Gruppo topologico

Uno spazio topologico G si definisce *gruppo topologico* se è un gruppo ed è tale che l'applicazione di gruppo

$$*\colon G \times G \to G, (g_1, g_2) \mapsto g_1 * g_2,$$

è continua e $G \to G, g \mapsto g^{-1}$ è continua.

Esempio. Ogni gruppo finito dotato della topologia discreta è un gruppo topologico (ad esempio $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^n$).

Esempio. $(\mathbb{R}, +)$ con la topologia euclidea è un gruppo topologico, infatti

$$+\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y,$$

topologicamente la controimmagine di $x + y$ è una retta

è continua per l'analisi. Ed analogamente

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -x,$$

è banalmente continua.

Esempio. $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ con la topologia euclidea è un gruppo topologico, infatti

$$\cdot : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, (x, y) \mapsto x\,y,$$

è continua per l'analisi o perchè la controimmagine di un punto u è $\{\, (x, y) \mid x\,y = u \,\}$, ovvero un'iperbole. Per cui la controimmagine di un intervallo aperto è una superficie compresa fra due rami di iperboli senza il bordo che è chiaramente aperta. Analogamente

$$\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, x \mapsto \frac{1}{x},$$

è continua in quanto $0 \notin \mathbb{R}^*$.

Proposizione 4.34 – Topologia su sottogruppo

Ogni sottogruppo di un gruppo topologico è un gruppo topologico rispetto alla topologia di sottospazio.

Proposizione 4.35 – Topologia su prodotto di gruppo

Ogni prodotto di un numero finito di gruppi topologici è un gruppo topologico rispetto alla topologia prodotto.

Esempio. $(\mathbb{R}^n, +)$ è un gruppo topologico in quanto prodotto di gruppi topologici.

Esempio. $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ è un gruppo topologico rispetto alla moltiplicazione complessa in quanto sottogruppo di un gruppo topologico.

Esempio. $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ è un gruppo topologico in quanto prodotto di gruppi topologici.

T^n è il toro n-dimensionale

Esempio. $GL_n(\mathbb{R})$ è un gruppo topologico, infatti

$$GL_n(\mathbb{R}) \subset M_N(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2},$$

con la topologia euclidea.

Osservazione. $GL_n(\mathbb{R})$ è un aperto di $M_n(\mathbb{R})$, infatti

$$\det\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, A \mapsto \det(A),$$

è continua in quanto funzione polinomiale. Da cui $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}\big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$ è aperto in $M_n(\mathbb{R})$ in quanto det è continua e $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è aperto in $\mathbb{R}$.

Definizione 4.36 – Traslazione sinistra

Sia $(G, \cdot)$ un gruppo topologico. Si definisce *traslazione sinistra* rispetto a $g \in G$, l'applicazione

$$L_g\colon G \to G, g' \mapsto g\,g'.$$

Osservazione. Analogamente si definisce la traslazione destra come

$$R_g\colon G \to G, g' \mapsto g'g.$$

Osservazione. R_g, L_g sono banalmente continue.

Definizione 4.37 – Azione di un gruppo su uno spazio topologico

Sia G un gruppo e sia X uno spazio topologico. Un'*azione a sinistra* di G su X è un'applicazione

$$*\colon G \times X \to X, (g, x) \mapsto g * x,$$

tale che

- $g_1(g_2 * x) = (g_1 g_2) * x$, $\forall\, x \in X, g_1, g_2 \in G$;
- $1_G * x = x$, $\forall\, x \in X$.

Osservazione. Analogamente si definisce un'azione a destra.

Notazione. Da questo momento, con la dicitura azione e traslazione, faremo riferimento alla definizione "sinistra" di queste.

Definizione 4.38 – Azione continua

Sia G un gruppo e sia X uno spazio topologico. Un'azione $*$ di G su X si definisce continua se l'applicazione $*$ è continua.

Osservazione. Se l'azione è continua, fissato $g \in G$, l'applicazione

$$X \to X, x \mapsto g * x,$$

è un omeomorfismo di X in sé stesso, infatti:

- esiste l'inversa $X \to X, x \mapsto g^{-1} * x$;
- è continua in quanto è la restrizione di $G \times X \to X$, che è continua, tramite $\{g\} \times X \to X$;
- l'inversa è continua perché è la restrizione tramite $\{g^{-1}\} \times X \to X$.

Definizione 4.39 – Orbita di un elemento

Sia $*$ un'azione di un gruppo G su uno spazio topologico X. Preso $x \in X$, si definisce *orbita* di x l'insieme degli elementi di X che si ottengo come azione di G su x, ovvero

$$G * x = \{\, g * x \mid g \in G \,\}.$$

Definizione 4.40 – Azione transitiva

Sia $*$ un'azione di un gruppo G su uno spazio topologico X. $*$ si dice *transitiva* se esiste un'unica orbita, ovvero se

$$\forall\, x \neq y \in X \exists\, g : g * x = y.$$

Definizione 4.41 – Azione libera

Sia $*$ un'azione di un gruppo G su uno spazio topologico X. $*$ si dice *libera* se

$$g * x = x \implies g = 1_G.$$

Esempio. Consideriamo l'azione di $GL_n(\mathbb{R})$ su R^n tramite

$$A\,\bar{x} = \bar{y}, \qquad \text{con } \bar{x} \in \mathbb{R}^n, A \in GL_n(\mathbb{R}).$$

Tale azione non sarà né libera né transitiva, infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{con } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 1_{GL_n(\mathbb{R})},$$

mentre $\{0\}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sono due orbite distinte.

Esempio. L'azione di $O_n(\mathbb{R})$ su $\mathbb{R}^n$ non è transitiva in quanto le orbite sono tutte sfere centrate nell'origine, infatti le matrici ortogonali mantengono le distanze.

Esempio. Consideriamo l'azione di $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ su $\mathbb{R}^{n+1}$ tramite

$$\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}, (\lambda, \nu) \mapsto \lambda\nu.$$

Le orbite di questa azione sono $\{0\}$ e $r \setminus \{0\}$, dove r è un sottospazio di dimensione uno, ovvero una retta.

Definizione 4.42 – Spazio delle orbite

Sia $*$ un azione di un gruppo G su uno spazio topologico X. Si definisce *spazio delle orbite* l'insieme di tutte le orbite dell'azione.

Esempio. Rifacendosi all'ultimo esempio dell'azione di $\mathbb{R}^*$ su $\mathbb{R}^{n+1}$, lo spazio delle orbite è lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}_n$ di dimensione n.

Esempio. Consideriamo l'azione di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}$ tramite

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (n, x) \mapsto n + x.$$

Dal momento che ogni orbita di tale azione è costituita da tutti i punti che hanno distanza intera, abbiamo già osservato che tale relazione di equivalenza costituisce un quoziente in S^1. Quindi $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ è omeomorfo a S^1 per l'unicità dello spazio quoziente.

Esempio. Consideriamo l'azione di $\mathbb{Z}^2$ su $\mathbb{R}^2$ tramite

$$\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \big((n, m), (x, y)\big) \mapsto (n + x, m + y).$$

Le orbite saranno costituite da tutte le rette parallele del piano, per cui lo spazio delle orbite sarà

$$S^1 \times S^1 = T^2.$$

5 CONNESSIONE E COMPATTEZZA

5.1 SPAZI CONNESSI

Definizione 5.1 – Spazio sconnesso

Uno spazio topologico X si dice *sconnesso* se esistono U, V aperti di X tali che

$$U \cap V = \emptyset \qquad \text{e} \qquad U \cup V = X.$$

Notazione. Le coppie U, V di aperti disgiunti tali che $X = U \cup V$ si dicono *coppie separatrici.*

Definizione 5.2 – Spazio connesso

Uno spazio topologico X si dice *connesso* se non è sconnesso, ovvero se per ogni coppia di aperti di X tali che $X = U \cup V$, si ha $U \cap V \neq \emptyset$.

Esempio. Se considero lo spazio topologico X costituito da due intervalli disgiunti U e V sulla retta reale, segue per definizione che $X = U \cup V$ è sconnesso.

Esempio. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è sconnesso in quanto

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

Definizione 5.3 – Sottospazio connesso

Sia X uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$. A si dice connesso se è connesso rispetto alla topologia di sottospazio.

Osservazione. Se A è connesso, dati U, V aperti disgiunti di X e tali che $A \subset U \cup V$, si ha

$$A \subset U \qquad \text{oppure} \qquad A \subset V.$$

Altrimenti se A avesse sia punti in U che in V, si avrebbe che $U \cap A, V \cap A$ è una coppia separatrice per A.

Proposizione 5.4 – Caratterizzazione della connessione

Uno spazio topologico X è connesso se e soltanto se gli unici sottoinsiemi di X che risultano sia aperti che chiusi sono X e $\emptyset$.

Dimostrazione. Supponiamo che X sia connesso e supponiamo che $A \subset X$ risulti sia aperto che chiuso, in particolare avremo A^c aperto. Quindi A, A^c sono due aperti di X tali che $X = A \cup A^c$ e $A \cap A^c = \emptyset$. Da ciò segue che $A = \emptyset$ oppure $A^c = \emptyset$, poiché altrimenti X risulterebbe sconnesso. $\Rightarrow)$

Supponiamo che gli unici sottoinsiemi di X contemporaneamente aperti e chiusi siano X e $\emptyset$. Prendiamo U, V aperti di X, distinti da X e $\emptyset$, tali che $X = U \cup V$. Se per assurdo fosse $U \cap V = \emptyset$ si avrebbe $U = V^c$, ovvero U, V contemporaneamente aperti e chiusi. Ciò è assurdo per ipotesi, per cui $U \cap V \neq \emptyset$, ovvero X è connesso. $\Leftarrow)$ □

Teorema 5.5 – fondamentale degli spazi connessi

Siano X, Y due spazi topologici con X connesso. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua, allora $f(X)$ è connesso.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $f(X)$ sia sconnesso, per definizione esistono due aperti U, V di Y tali che

$$U \cap V = \emptyset \qquad \text{e} \qquad U \cup V \supset f(X).$$

Siano $A = f^{-1}\big(U \cap f(X)\big)$ e $B = f^{-1}\big(V \cap f(X)\big)$. Per la continuità di f sappiamo che A, B sono aperti di X, inoltre avremo

$$A \cup B = X \qquad \text{e} \qquad A \cap B = \emptyset,$$

ovvero X è sconnesso. Ma ciò è assurdo per ipotesi, quindi $f(X)$ è connesso. □

Osservazione. Dal teorema segue che la connessione è una proprietà topologica.

Proprietà 5.6. Sia X uno spazio topologico e sia $A \subset X$ connesso. Allora $\overline{A}$ è connesso.

Dimostrazione. Supponiamo che esistano U, V aperti di X tali che $U \cap V = \emptyset$ e $U \cup V \supset \overline{A}$. Per definizione di chiusura $\overline{A} \supset A$, per cui $U \cup V \supset A$. Ma A è connesso, per cui $A \subset U$ oppure $A \subset V$. Supponiamo ad esempio $A \subset U$, per le proprietà della chiusura avremo $\overline{A} \subset U$, ovvero $\overline{A}$ connesso. □

Proprietà 5.7. Sia X uno spazio topologico e sia $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di sottoinsiemi di X connessi. Se esiste $P \in B_\alpha$, $\forall\, \alpha \in A$, allora

$$\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$$

è connesso.

Dimostrazione. Supponiamo che U, V siano due aperti di X tali che

$$U \cap V = \emptyset \qquad \text{e} \qquad U \cup V \supset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha.$$

Per ipotesi $P \in B_\alpha$, $\forall\, \alpha \in A$, per cui $P \in U$ oppure $P \in V$. Sappiamo che $U \cup V \supset B_\alpha$, ma in particolare B_α sono connessi, quindi $B_\alpha \subset U$ oppure $B_\alpha \subset V$. Supponiamo $P \in U$, avremo che $U \cap B_\alpha \neq \emptyset$, $\forall\, \alpha \in A$, per cui $B_\alpha \subset U$, $\forall\, \alpha \in A$. Ovvero

$$\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha \subset U,$$

da cui la tesi. □

Proprietà 5.8. Il prodotto di un numero finito di spazi topologici connessi è connesso.

Dimostrazione. Siano $X_1, \ldots, X_n$ spazi topologici connessi, affinché $X_1 \times \ldots \times X_n$ sia connesso, ci basta dimostrare che il prodotto di due spazi è connesso.
Siano quindi X, Y due spazi connessi, vogliamo dimostrare che $X \times Y$ è connesso. Consideriamo U, V aperti di $X \times Y$ tali che $U \cap V = \emptyset$ e $X \times Y = U \cup V$. Sia inoltre $(x_0, y_0) \in U$. Ora $\{x_0\} \times Y$ è connesso per il teorema fondamentale, in quanto

$$f\colon Y \to \{x_0\} \times Y, y \mapsto (x_0, y),$$

è ovviamente continua e suriettiva e Y è connesso. Per cui $U \supset \{x_0\} \times Y$.
Analogamente $X \times \{y\}$ è connesso per ogni $y \in Y$, quindi $U \supset X \times \{y\}$, perché abbiamo dimostrato che $(x_0, y) \in X \times \{y\}$. Ma ciò vale per ogni $y \in Y$, quindi

$$U \supset \bigcup_{y \in Y} X \times \{y\} = X \times Y,$$

quindi $U = X \times Y$, ovvero $X \times Y$ è connesso. □

Proprietà 5.9. Il quoziente di uno spazio connesso è connesso.

Dimostrazione. Sia $\pi\colon X \to Y$ la mappa quoziente su Y. π è per definizione continua e suriettiva, quindi $f(X) = Y$ è connesso per il teorema fondamentale. □

Proposizione 5.10 – Sottospazi connessi in $\mathbb{R}$

Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è connesso se e soltanto se è un intervallo.

$\Leftarrow)$ *Dimostrazione.* Sia $J \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Supponiamo per assurdo che J sia sconnesso, siano quindi U, V aperti disgiunti di $\mathbb{R}$ tali che $U \cup V \supset J$. Siano inoltre $a \in U \cap J$ e $b \in V \cap J$ e supponiamo che $a < b$. Sicuramente $[a, b] \subset J$. Ora U, V sono aperti, quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$[a, a + \varepsilon) \subset U \qquad \text{e} \qquad (b - \varepsilon, b] \subset V$$

Sia $c = \sup\big(U \cap [a, b]\big)$, segue

$$a + \varepsilon \leqslant c \leqslant b - \varepsilon,$$

ovvero $c \in J$. Ma $U \cup V \supset J$, quindi $j \in U$ oppure $j \in V$. Se $c \in U$ esisterebbe $\delta > 0$ tale che $(c - \delta, c + \delta) \subset U$ ma ciò è assurdo per la definizione di estremo superiore. Analogamente se $c \in V$ esisterebbe $\delta > 0$ tale che $(c - \delta, c + \delta) \subset V$ che è nuovamente assurdo per la definizione di estremo superiore. Per cui J è connesso.

$\Rightarrow)$ Supponiamo che $J \subset \mathbb{R}$ non sia un intervallo. Quindi esiste $c \notin J$ tale che esistono $a, b \in J$ con $a < c < b$. Consideriamo $U = (-\infty, c), V = (c, +\infty)$ aperti di $\mathbb{R}$, per definizione avremo

$$U \cap V = \emptyset \qquad \text{e} \qquad U \cup V \supset J,$$

con $J \not\subset U$ e $J \not\subset V$, per cui J è sconnesso. □

Esempio. I rettangoli in $\mathbb{R}^2$ sono connessi poiché sono il prodotto $I \times J$ di intervalli, connessi in $\mathbb{R}$.

Esempio. I dischi in $\mathbb{R}^2$ sono connessi poiché sono omeomorfi ai rettangoli.

Esempio. S^1 è connesso poiché è il quoziente di un connesso, abbiamo infatti dimostrato che

$$S^1 = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}.$$

Esempio. S^n, T^n, le palle e i cuboidi sono connessi in R^n.

5.2 CONNESSIONE PER ARCHI

Definizione 5.11 – Arco fra due punti

Sia X uno spazio topologico e siano $P, Q \in X$. Un *arco*, o *cammino*, da P a Q è una mappa continua

$$\gamma \colon [0,1] \to X \qquad \text{tale che} \qquad \gamma(0) = P \text{ e } \gamma(1) = Q.$$

Notazione. P e Q si dicono rispettivamente punto iniziale e punto finale del cammino.

Definizione 5.12 – Spazio connesso per archi

Uno spazio topologico X si dice *connesso per archi* se, dati $P, Q \in X$, esiste un arco da P in Q.

Proposizione 5.13 – Connessione per archi implica connessione

Sia X uno spazi topologico connesso per archi. Allora X è connesso.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che U, V siano una coppia separatrice per X. Prendiamo $P \in U$ e $Q \in V$. Dal momento che X è connesso per archi esisterà

$$\gamma \colon [0,1] \to X \qquad \text{tale che} \qquad \gamma(0) = P \text{ e } \gamma(1) = Q.$$

Per la continuità di γ sappiamo che $\gamma^{-1}(U), \gamma^{-1}(V)$ sono aperti non vuoti disgiunti. Inoltre si avrebbe

$$\gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V) = [0,1],$$

ma ciò è assurdo in quanto $[0,1]$ è un intervallo, ed è pertanto connesso. □

Esempio. Il viceversa è falso. Consideriamo ad esempio il seno topologico $X = A \cup B$, mostrato in figura 5.1, con

$$A = \{\, (x,y) \mid x = 0, y \in [-1,1] \,\} \qquad \text{e} \qquad B = \left\{ (x,y) \;\middle|\; x \in (0,1], y = \sin\frac{1}{x} \right\}.$$

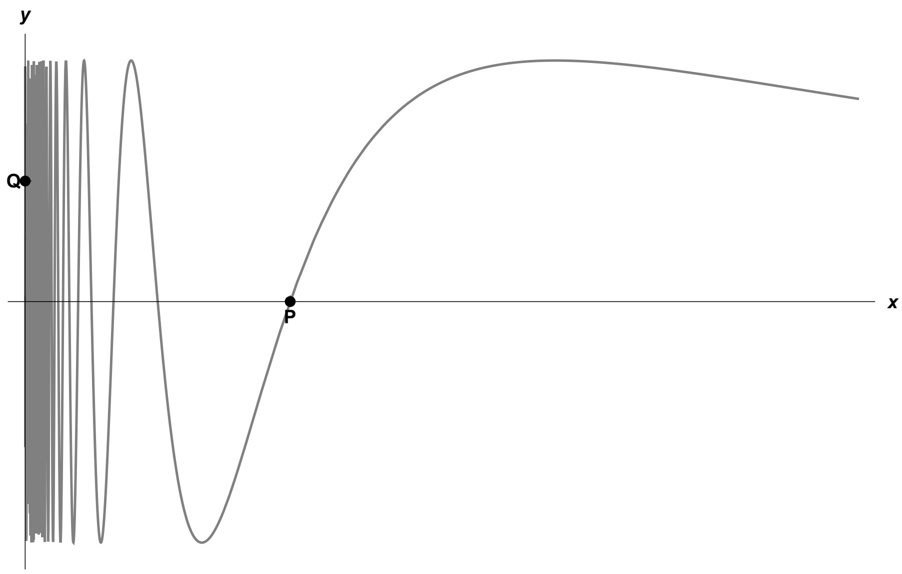

Figura 5.1: Il seno topologico.

intuitivamente prenderemo la successione di punti di ordinata y_0

Dal momento che $\sin\frac{1}{x}$ è continua, per la proposizione 4.12, $B \approx (0,1]$. Quindi B è connesso e pertanto lo è anche $\overline{B}$. Ma $\overline{B} = X$, infatti se prendiamo $P_0 = (0, y_0) \in A$ possiamo costruire una successione di elementi di B che converge a P_0. Sia ϑ il primo valore di $x < 1$ tale che $\sin\vartheta = y_0$. Definiamo quindi la successione $\frac{1}{x_k} = \vartheta + 2k\pi$. Tale successione tende ovviamente a 0, inoltre $\sin\frac{1}{x_k} = \sin(\vartheta + 2kp) = y_0$. Quindi X è connesso.
Mostriamo infine che X non è connesso per archi. Supponiamo per assurdo che esista $f\colon [0,1] \to X$ con $0 \mapsto p, 1 \mapsto q$ per ogni $p, q \in X$. Prendiamo ad esempio $p = \left(\frac{1}{\pi}, 0\right)$ e $q = \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Allora, per ogni $t \neq 0, 1$, avremo

$$f(t) = \left(a(t), \sin\frac{1}{a(t)}\right),$$

con $a(t)\colon [01,] \to (0,1]$ continua. Questo poiché f è continua e pertanto lo è ogni sua componente, in particolare lo sarà la prima che è proprio $a(t)$. Quindi

$$f(1) = \left(0, \frac{1}{2}\right) \implies \lim_{t\to 1} a(t) = 0.$$

D'altronde non esiste

$$\lim_{t\to 1} \sin\frac{1}{a(t)},$$

ma ciò è assurdo in quanto $\sin\frac{1}{a(t)}$ è continua e vale $\sin\frac{1}{a(t)} = \frac{1}{2}$.

Teorema 5.14 – del Valore medio

Sia X uno spazio topologico connesso e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $p, q \in X$ allora f assume tutti i valori compresi tra $f(p)$ e $f(q)$.

Dimostrazione. L'immagine $f(X)$ è connessa, essendo contenuta in $\mathbb{R}$ è necessariamente un intervallo, da cui la tesi. □

5.3 COMPONENTI CONNESSE

Definizione 5.15 – Relazione di connessione

Sia X uno spazio topologico. Diremo che $p, q \in X$ sono in *relazione di connessione* $\sim$ se e soltanto se esiste $A \subseteq X$ tale che A è connesso e $p, q \in A$.

Osservazione. La relazione di connessione è una relazione di equivalenza, infatti:

- $p \sim p$ in quanto $\{p\}$ è ovviamente connesso.
- $p \sim q \implies q \sim p$ è banalmente vero.
- $p \sim q, q \sim r \implies p \sim r$ poiché l'unione di due connessi non disgiunti è connessa.

Definizione 5.16 – Componenti connesse

Sia X uno spazio topologico. Le classi di equivalenza indotte dalla relazione di connessione si definiscono *componenti connesse*.

Notazione. Uno spazio topologico i cui gli insiemi dei singoli punti costituiscono tutte le componenti connesse si dice *totalmente sconnesso*.

Esempio. $X = B_1((-2,2)) \cup B_1((2,-2))$ dotato della topologia indotta di $\mathbb{R}^2$ ha due componenti connesse individuate proprio dalle due palle.

Esempio. $\mathbb{R} \setminus \{a \neq b\}$ ha tre componenti connesse, nello specifico:

$$\mathbb{R} \setminus \{a \neq b\} = (-\infty, a) \cup (a, b) \cup (b, +\infty).$$

Esempio. $X = S^1 \setminus \{a \neq b\}$ ha due componenti connesse. Infatti X risulta essere unione di due archi che sono omeomorfi a due intervalli di $\mathbb{R}$.

Esempio. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ è totalmente sconnesso. Infatti, comunque presi $q < r \in \mathbb{Q}$ esisterà sempre $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tale che $q < x < r$. Per cui

$$p \in (-\infty, x) \cap \mathbb{Q} \qquad \text{e} \qquad q \in (x, +\infty) \cap \mathbb{Q},$$

che è una coppia separatrice di $\mathbb{Q}$ che contiene separatamente i due punti, per cui p, q non possono appartenere alla stessa componente connessa. Dal momento che ciò vale per ogni coppia di punti in $\mathbb{Q}$ se ne deduce che $\mathbb{Q}$ è totalmente sconnesso.

Proposizione 5.17 – Componenti connesse sono connessi massimali

Sia X uno spazio topologico. Le componenti connesse di X coincidono esattamente con i sottoinsiemi connessi massimali.

Dimostrazione. Preso $q \in X$, sia A la componente connessa che contiene q e sia B l'unione di tutti i connessi che contengono q. Per la proposizione 5.7 B è connesso. In particolare risulta essere un connesso massimale, infatti se C è un connesso che contiene B, si avrebbe $q \in C$; ma per definizione B è unione di tutti i connessi che contengono q, per cui $B \supseteq C$. Mostriamo quindi che $A = B$. Preso $p \in B$ si avrebbe $p \sim q$ in quanto B è un connesso che li contiene entrambi; in particolare p, q appartengono alla stessa componente connessa, quindi $p \in A$. Viceversa, preso $p \in A$, p apparterrà ad un qualche aperto che contiene q; dal momento che B è l'unione di tutti questi aperti, $p \in B$. □

Proprietà 5.18. Ogni componente connesso è un sottoinsieme chiuso di X.

Dimostrazione. Dalla proposizione 5.6, A connesso implica $\overline{A}$ connesso. Ma per la proposizione precedente A è massimale e $A \subseteq \overline{A}$, quindi $A = \overline{A}$. □

Osservazione. In generale è falso che le componenti connesse siano anche aperte. Infatti $\mathbb{Q}$ ha come componenti connesse gli insiemi dei suoi punti, che sono chiusi ma non aperti.

Corollario. Se X ha un numero finito di componenti connesse, allora ogni componente connessa è sia chiusa che aperta.

Dimostrazione. Sappiamo che ogni componente connessa è chiusa, per cui il complementare di ciascuna sarà chiusa poiché unione finita di chiusi. Ovvero ogni componente connessa è anche aperta. □

Proprietà 5.19. Ogni sottoinsieme connesso di X è contenuto in un'unica componente connessa.

Dimostrazione. Sia $A \subset X$ connesso. Siccome le componenti connesse costituiscono una partizione di X, esisterà una componente connessa B che interseca A. Per la proposizione 5.7 $A \cup B$ è connesso, quindi, per la massimalità di B, $A \cup B = B$. Ovvero $A \subset B$. □

Definizione 5.20 – Relazione di connessione per archi

Sia X uno spazio topologico. Diremo che $p, q \in X$ sono in *relazione di connessione per archi* ρ se e soltanto se esiste un arco $f\colon [0, 1] \to X$ continuo tale che $0 \mapsto p, 1 \mapsto q$.

Osservazione. La relazione di connessione per archi è una relazione di equivalenza, infatti:

- $p\rho p$ perché posso considerare l'applicazione costante $f\colon [0, 1] \to X, t \mapsto p$ che è banalmente continua.
- $p\rho q \implies q\rho p$ perché se $f(t)$ è l'arco da p in q, allora $f(1 - t)$ è l'arco da q in p.
- $p\rho q, q\rho r \implies p\rho r$ in quanto se $f(t)$ è l'arco da p in q e $g(t)$ è quello da q in r, ci basta prendere
$$\begin{cases} f(2t) & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(2t-1) & \text{se } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$
che è un arco da p in r.

Proprietà 5.21. Ogni componente connessa per archi è contenuta in un'unica componente connessa.

Proprietà 5.22. Ogni componente connessa è unione disgiunta di componenti connesse per archi.

Proprietà 5.23. Se $A \subset X$ è connessa per archi allora A è contenuta in un'unica componente arco connessa.

Esempio. Consideriamo nuovamente il seno del topologo $X = A \cup B$ con

$$A = \{\, (0, y) \mid |y| \leqslant 1 \,\} \qquad \text{e} \qquad B = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \,\middle|\, x \in (0, 1) \right\}.$$

Abbiamo già osservato che X è connesso ma non esiste nessun arco da $x \in B$ a $y \in A$. D'altronde $A \approx [-1, 1]$ e $B \approx (0, 1)$, pertanto sia A che B sono arco connessi.

Osservazione. In generale, a differenza della connessione, non vale C arco connesso $\implies \overline{C}$ arco connesso. Infatti la $B \subset X$, con X il seno del topologo, è arco connesso, ma $\overline{B} = X$ non lo è.

Definizione 5.24 – Spazio localmente connesso

Uno spazio topologico X si dice *localmente connesso* se ha una base di aperti connessi.

Osservazione. Equivalentemente si può dire che ogni $x \in X$ ha un intorno aperto U_x connesso.

Definizione 5.25 – Spazio localmente connesso per archi

Uno spazio topologico X si dice *localmente connesso per archi* se ha una base di aperti arco connessi.

Esempio. Il seno del topologo è connesso ma non è localmente connesso.

Esempio. L'unione disgiunta di due dischi chiusi è localmente connesso ma non è connesso.

Esempio. Sia $Y = X \cup C$ con X il seno del topologo e C una curva che raccorda $\left(2\pi, \sin \frac{1}{2\pi}\right)$ a $(0, -1)$. Y è connesso per archi, ma non è né localmente connesso né localmente connesso per archi.

Proprietà 5.26. Se X è localmente connesso allora ogni componente connessa è aperta.

Dimostrazione. Sia A la componente connessa di $x \in X$. Siccome X è localmente connessa esisterà un intorno aperto U di x che è connesso. Per massimalità avremo $U \subset A$, ovvero x è un punto interno di A, cioè A è aperto. □

Proprietà 5.27. Se X è localmente connesso per archi allora ogni componente arco connessa è aperta.

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione precedente. □

Proprietà 5.28. Se X è localmente connesso per archi allora le componenti arco connesse coincidono con le componenti connesse.

Dimostrazione. Sia $x \in X$ e siano A la componente connessa di x e B la sua componente connessa per archi. Dalla proprietà 5.21 sappiamo che $B \subset A$. Ora X in particolare è localmente connessa e pertanto A è aperta. Per la proprietà 5.22 possiamo scrivere A come unione disgiunta di componenti connesse per archi, ognuna delle quali è aperta in X e di conseguenza anche in A. Se per assurdo B non fosse l'unica arco componente in A, allora $\{B, A \setminus B\}$ sarebbe una coppia separatrice per A che è assurdo in quanto A è connesso. Questo prova che $A = B$. □

Osservazione. In particolare se X è localmente connesso per archi, X è connesso se e soltanto se X è connesso per archi. Infatti se X è connesso avrà una sola componente connessa, che per la proprietà è equivalente a dire che X ha un'unica arco componente, ovvero X è connesso per archi.

Proposizione 5.29 – Varietà localmente connessa per archi

Ogni varietà topologica M è localmente connessa per archi.

Dimostrazione. Segue dal fatto che M è localmente omeomorfa ad $\mathbb{R}^n$ che è connesso per archi. □

5.4 SPAZI COMPATTI

Definizione 5.30 – Sottoricoprimento

Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X. Un *sottoricoprimento* di $\mathcal{U}$ è una sottocollezione $\mathcal{U}' = \{U_{i_k}\}_{i_k \in I'}$, con $I' \subset I$, tale che

$$\bigcup_{i_k \in I'} U_{i_k} = X.$$

Definizione 5.31 – Spazio compatto

Uno spazio topologico X è *compatto* se ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X ammette un sottoricoprimento finito, ovvero

$$X = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_k},$$

con $i_1, \ldots, i_k \in I'$.

Definizione 5.32 – Sottoinsieme compatto

Un sottoinsieme K di uno spazio topologico X si dice *compatto* se K è uno spazio topologico compatto nella topologia di sottospazio.

Osservazione. Analogamente $K \subset X$ è compatto se e soltanto se ogni famiglia di aperti che contiene K ammette una sottofamiglia finita che lo contiene ancora.

Notazione. Una famiglia di aperti che contiene K sarà chiamata ricoprimento aperto di K.

Osservazione. $\mathbb{R}$ non è uno spazio topologico compatto. Infatti $\mathcal{U} = \{(-n, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento di $\mathbb{R}$ ma ogni sottocollezione finita è del tipo

$$\bigcup_{k=1,\ldots,M} U_{i_k} = (-M, M) \subset \mathbb{R}.$$

Proposizione 5.33 – Immagine continua di un compatto

Sia $f \colon X \to Y$ un'applicazione continua da X compatto. Allora $f(X)$ è un sottoinsieme compatto di Y.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un qualsiasi ricoprimento aperto di $f(X)$. Per definizione U_i sono aperti in X, per cui $\mathcal{V} = \{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ è una collezione di aperti di X. Inoltre vale

$$X = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i).$$

Ora X compatto ci dice $X = f^{-1}(U_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_n)$, per cui

$$f(X) = U_1 \cup \ldots \cup U_n.$$

□

Osservazione. La compattezza è quindi una proprietà topologica.

Proprietà 5.34. Ogni sottoinsieme chiuso di uno spazio compatto è compatto.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di C. Dal momento che C è chiuso, $X \setminus C$ sarà aperto. Quindi $\mathcal{U} \cup (X \setminus C)$ è un ricoprimento aperto di X. Ma X è compatto, quindi esisterà un ricoprimento finito:

$$X = U_1 \cup \ldots \cup U_k \cup (X \setminus C).$$

In particolare risulta $C \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_k$, ovvero C è compatto. □

Proprietà 5.35. Se X è uno spazio di Hausdorff allora gli insieme compatti e disgiunti possono essere separati da insiemi aperti. Ovvero se A, B sono compatti e disgiunti di X, allora esiste una coppia di aperti U, V disgiunti in X tali che

$$A \subset U, B \subset V \qquad \text{e} \qquad U \cap V = \emptyset.$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso in cui $B = \{q\}$ è un singleton. X è di Hausdorff, quindi per ogni $p \in A$ esiste una coppia di intorni aperti U_p di p e V_q di q che sono disgiunti. La famiglia $\{\, U_p \mid p \in A \,\}$ è un ricoprimento di A, pertanto avrà un sottoricoprimento finito $\{U_{p_1}, \ldots, U_{p_k}\}$. Definiamo $\mathbb{U} = U_{p_1} \cup \ldots \cup U_{p_k}$ e $\mathbb{V} = V_{p_1} \cap \ldots \cap V_{p_k}$. Quindi per definizione $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$ sono aperti disgiunti tali che $A \subset \mathbb{U}$ e $q \in \mathbb{V}$.
Consideriamo quindi il caso generale in cui B è un generico compatto. Per quanto mostrato sopra, per ogni punto $q \in B$ esiste una coppia di aperti disgiunti $\mathbb{U}, \mathbb{V}$ tali che $A \subset \mathbb{U}$ e $q \in \mathbb{V}$. Per la compattezza di B esiste un sottoricoprimento finito $\{\mathbb{V}_{q_1}, \ldots, \mathbb{V}_{q_s}\}$ di B. Quindi per ottenere la tesi basta considerare $\mathcal{U} = \mathbb{U}_{q_1} \cap \ldots \cap \mathbb{U}_{q_s}$ e $\mathcal{V} = \mathbb{V}_{q_1} \cup \ldots \cup \mathbb{V}_{q_s}$. □

Proprietà 5.36. Ogni insieme compatto in uno spazio di Hausdorff è chiuso.

Dimostrazione. Sia X uno spazio di Hausdorff e supponiamo $K \subset X$ compatto. Preso $q \in X \setminus K$, per la proposizione precedente, esiste una coppia di aperti disgiunti U, V tali che $K \subset U$ e $q \in V$. In particolare V è un intorno di q disgiunto da K. Quindi ogni punto che non appartiene a K appartiene al suo esteriore, ovvero K è chiuso. □

Proprietà 5.37. Il prodotto finito di spazi compatti è compatto.

Dimostrazione. Per induzione è sufficiente mostrare che il prodotto di due spazio compatti X, Y è compatto. Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di $X \times Y$. Preso $x \in X$ sappiamo che la sua fibra rispetto alla proiezione $\pi\colon X \times Y \to X, (x, y) \mapsto x$ è $\{x\} \times Y \approx Y$. Per la compattezza di Y esisterà quindi un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$ che contiene $\{x\} \times Y$, supponiamo $\{U_1, \ldots, U_n\}$. Ora π è aperta, quindi $V_x = \pi(U_1 \cap \ldots \cap U_n)$ è un aperto di X che contiene $x \in X$, ovvero V_x è un intorno di X. In particolare $\{V_x\}_{x \in X}$ è un ricoprimento aperto di X, quindi

$$X = V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_s} \implies X \times Y = (V_{x_1} \times Y) \cup \ldots \cup (V_{x_s} \times Y),$$

per cui posso selezionare un sottoricoprimento finito. □

Proprietà 5.38. Ogni spazio quoziente di un compatto è compatto.

Dimostrazione. Per definizione un'applicazione quoziente $\pi\colon X \to \frac{X}{\sim}$ è continua è suriettiva. Sappiamo che l'immagine continua di compatti è compatta, quindi $\pi(X) = \frac{X}{\sim}$ è compatto. □

Teorema 5.39 – di Tychonoff

Il prodotto di un numero qualsiasi di spazi compatti è compatto.

Dimostrazione. Non fornita. □

Definizione 5.40 – Limitatezza negli spazi metrici

Un sottospazio S di uno spazio metrico X si dice *limitato* se vale una delle seguenti proprietà equivalenti:

- Esiste $M > 0$ tale che per ogni $x, y \in S$ si ha $d(x, y) < M$.
- Per ogni $x \in S$ esiste $R > 0$ tale che $S \subset B_R(x)$.
- S è contenuto in qualche disco.

Proposizione 5.41 – Compattezza negli spazi metrici

Sia X uno spazio metrico e sia $K \subset X$ compatto. Allora K è chiuso e limitato.

Dimostrazione. X è di Hausdorff in quanto spazio metrico. Per la proprietà 5.36 K è chiuso. Resta da mostrare che K è limitato. Per ogni $p \in K$ siano $B_r(p)$ dischi di centro p con raggio arbitrario. In particolare

$$K \subset \bigcup_{r>0} B_r(p).$$

Ma K è compatto, quindi $K \subset B_{r_1}(p) \cup \ldots \cup B_{r_n}(p)$, ovvero $K \subset B_{r_n}(p)$. □

Esempio. Sia X uno spazio compatto e sia $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una collezione discendente di chiusi, ovvero tale che

$$F_n = \overline{F}_n, \qquad F_{n+1} \subset F_n, \qquad F_n \neq \emptyset.$$

Dimostriamo che l'intersezione $\bigcap F_n$ è non vuota.
Per definizione i complementari F_n^c sono aperti. Supponiamo per assurdo che $\bigcap F_n = \emptyset$, per cui

$$\emptyset^c = X = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n^c.$$

Quindi $\{F_n^c\}$ è un ricoprimento aperto di X. Per compattezza posso estrarre un sottoricoprimento finito, ovvero

$$X = F_{n_1}^c \cup \ldots \cup F_{n_k}^c,$$

ma ciò è vero se e soltanto se

$$\emptyset = F_{n_1} \cap \ldots \cap F_{n_k} \iff F_{n_k} = \emptyset,$$

che è assurdo per ipotesi.

Lemma 5.42. Il sottoinsieme $[0, 1]$ è compatto in $\mathbb{R}$ con la topologica euclidea.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di $[0, 1]$. Quindi U_i sono aperti in $\mathbb{R}$ e $\bigcup U_i \supseteq [0, 1]$. Supponiamo per assurdo che $\mathcal{U}$ non abbia sottoricoprimenti finiti. Dividiamo quindi $[0, 1] = [0, 1/2] \cup [1/2, 1]$, segue che $\mathcal{U}$ è un ricoprimento aperto di $[0, 1/2]$ e $[1/2, 1]$. Dal momento che non esistono sottoricoprimenti finiti di $[0, 1]$, necessariamente non esisteranno per almeno uno dei due sottoinsiemi in cui lo abbiamo diviso. Supponiamo, senza perdita di generalità, che non esista per $[0, 1/2]$.
Iterando questo procedimento si ottiene una scomposizione di $[0, 1]$ come intervalli di lunghezza $\frac{1}{2^n}$ di cui almeno uno non ammette sottoricoprimenti finiti. Abbiamo quindi

costruito una catena di intervalli chiusi C_n tali che

$$[0,1] \supset C_0 \supset C_1 \supset \ldots \supset C_n \supset \ldots \qquad \text{e} \qquad |C_n| = \frac{1}{2^n},$$

e che non ammettono sottoricoprimenti finiti.
Possiamo costruire adesso una successione di Cauchy $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $p_i \in C_i$. Siccome $p_n \in [0,1]$ che è chiuso, avremo

$$p_n \to L \in [0,1] \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i,$$

ovvero esisterà $\bar{\imath} \in I$ tale che $L \in U_{\bar{\imath}}$. Per definizione di convergenza $\{p_n\}$ appartiene definitivamente ad $U_{\bar{\imath}}$, ovvero

$$\exists\, \varepsilon > 0 : (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \subset U_{\bar{\imath}}.$$

Quindi, per $n > M$ con $\frac{1}{2^M} < \varepsilon$ si ha $C_n \subset (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, ovvero $C_n \subset U_{\bar{\imath}}$. Ma ciò è assurdo poiché altrimenti C_n ammetterebbe un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$. □

Teorema 5.43 – di Heine-Borel

I sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli i chiusi e limitati.

$\Rightarrow)$ *Dimostrazione.* Vero in quanto abbiamo mostrato che un compatto in uno spazio metrico è chiuso e limitato.

$\Leftarrow)$ Mostriamolo prima nel caso $n = 1$. Per il lemma precedente sappiamo che $[0,1]$ è un compatto di $\mathbb{R}$. Ripetendo la stessa dimostrazione si dimostra facilmente che tutti gli intervalli del tipo $[a,b], a,b \in \mathbb{R}$ sono chiusi e limitati. Resta da dimostrare che l'unione disgiunta e finita di intervalli chiusi e limitati sono compatti in $\mathbb{R}$.
Sia $K \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato. Per la limitatezza sarà necessariamente contenuto in un intervallo del tipo $[a,b]$. Se $\mathcal{U}$ è un ricoprimento aperto di K, certamente $\mathcal{U} \cup (\mathbb{R} \setminus K)$ è un ricoprimento aperto di $[a,b]$. Dal momento che $[a,b]$ è compatto avremo che esiste un sottoricoprimento finito

sfruttiamo il fatto che K è chiuso per dire che $\mathcal{U} \cup (\mathbb{R} \setminus K)$ è aperto

$$U_1 \cup \ldots \cup U_k \cup (\mathbb{R} \setminus K) \supseteq [a,b].$$

Ne segue che $\{U_1, \ldots, U_k\}$ è un sottoricoprimento finito di K.
L'estensione al caso n qualsiasi segue banalmente dal fatto che gli n-cubi chiusi e limitati sono compatti in quanto prodotto di compatti. D'altronde il generico chiuso e limitato sarà sempre contenuto in un n-cubo chiuso $C_r(\bar{0})$, per cui ripetendo la stessa dimostrazione del caso $n = 1$ si giunge alla tesi. □

Osservazione. Il teorema di Heine-Borel non vale in ogni spazio metrico. Ad esempio su $X = (0, +\infty)$ con la distanza euclidea, l'intervallo $C = (0,1]$ è chiuso e limitato in X ma non è compatto. Infatti $\mathcal{U} = \{(1/n, 1]\}$ è un ricoprimento aperto di C che non ammette sottoricoprimenti finiti, in quanto

$$U_1 \cup \ldots \cup U_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right] \not\supset C.$$

Corollario. $K \subset \mathbb{R}$ è compatto e connesso se e soltanto se $K = [a,b], a,b \in \mathbb{R}$.

Teorema 5.44 – di Massimo e minimo

Sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione continua su X compatto. Allora f ammette massimo e minimo.

Dimostrazione. Sappiamo che l'immagine continua di un compatto è compatta. Quindi $f(X)$ è unione finita di intervalli chiusi e limitati, in quanto questi ultimi costituiscono tutti i compatti di $\mathbb{R}$. Ovvero

$$f(X) = [a_1, b_1] \cup \ldots \cup [a_n, b_n],$$

con $a_1 < b_1 < a_2 < \ldots < b_n$. Ne segue che $a_1 = \min f$ e $b_n = \max f$. □

Proposizione 5.45 – Componenti connesse di un compatto

Sia X uno spazio compatto. Allora X ha un numero finito di componenti connesse.

Dimostrazione. Non fornita. □

Definizione 5.46 – Diametro di un sottoinsieme

Sia X uno spazio metrico e sia $S \subset X$ un suo sottoinsieme. Si definisce diametro di S la più grande distanza fra due suoi punti:

$$\operatorname{diam} S = \sup\{\, d(x,y) \mid x, y \in S \,\}.$$

Definizione 5.47 – Numero di Lebesgue

Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di uno spazio metrico X. Un numero $\delta > 0$ si dice *numero di Lebesgue* di $\mathcal{U}$ se ogni sottoinsieme $S \subset X$ con $\operatorname{diam} S < \delta$ è contenuto in un aperto di $\mathcal{U}$.

Proposizione 5.48 – Numero di Lebesgue negli spazi compatti

Sia X uno spazio metrico compatto. Allora ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ ha un numero di Lebesgue.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X. Per ogni $x \in X$ esisterà $U \in \mathcal{U}$ tale che $x \in U$. Dal momento che U è aperto esisterà qualche $r(x) > 0$ tale che $\overline{B}_{2r(x)}(x) \subset U$. Al variare di $x \in X$ avremo che $\left\{\, B_{r(x)}(x) \;\middle|\; x \in X \,\right\}$ è un ricoprimento aperto di X. Per compattezza

$$X = B_{r(x_1)}(x_1) \cup \ldots \cup B_{r(x_k)}(x_k).$$

Vogliamo mostrare che $\delta = \min\{\, r_1, \ldots, r_k \,\}$ è il numero di Lebesgue di $\mathcal{U}$. Sia quindi $S \subset X$ con $\operatorname{diam} S < \delta$. Allora per ogni $y \in S$ esisterà x_i tale che $y \in B_{r(x_i)}(x_i)$ con $i \in \{1, \ldots, k\}$. Per cui

$$S \subset \overline{B}_{2r(x_i)}(x_i) \subset U \in \mathcal{U},$$

infatti per ogni $z \in S$ avremo

$$d(z, x_i) \leqslant d(z, y) + d(y, x_i) \leqslant \delta + r(x_i) \leqslant 2r(x_i),$$

ovvero $z \in \overline{B}_{2r(x_i)}(x_i)$. □

5.5 COMPATTEZZA PER SUCCESSIONI E PER PUNTI LIMITE

Definizione 5.49 – Spazio punto limite compatto

Uno spazio topologico X si dice *punto limite compatto* se ogni sottoinsieme infinito di X ammette un punto limite.

Esempio. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ è un sottoinsieme discreto infinito, quindi $\mathbb{R}$ non è punto limite compatto.

Definizione 5.50 – Spazio compatto per successioni

Uno spazio topologico X si dice *compatto per successioni* se ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione convergente.

Proposizione 5.51 – Spazio compatto è punto limite compatto

Sia X uno spazio compatto. Allora X è punto limite compatto.

Dimostrazione. Non fornita. □

Lemma 5.52. Se X è uno spazio di Hausdorff e a base numerabile, allora la compattezza coincide con la compattezza per successioni e con la nozione di punto limite compatto.

Proposizione 5.53 – Spazio metrico compatto è completo

Sia X uno spazio metrico compatto. Allora X è uno spazio metrico completo.

Osservazione. $\mathbb{R}$ è completo ma non è compatto.

5.6 CLOSED MAP LEMMA

Teorema 5.54 – Closed map lemma

Sia $F\colon X \to Y$ un'applicazione continua da X compatto in Y di Hausdorff. Allora

1. F è chiusa.
2. Se F è suriettiva allora è un'applicazione quoziente.
3. Se F è iniettiva allora è un embedding.
4. Se F è biiettiva allora è un omeomorfismo.

1) *Dimostrazione.* Se $C \subset X$ chiuso, allora è compatto, in quanto ogni chiuso è compatto in uno spazio compatto. In particolare $F(C)$ è compatto in Y in quanto immagine di un compatto. D'altronde sappiamo che un insieme compatto in uno spazio di Hausdorff è

chiuso, per cui F è un'applicazione chiusa.

Se F è un'applicazione chiusa manderà chiusi saturi in chiusi. Inoltre F è suriettiva, quindi è un'applicazione quoziente per la caratterizzazione tramite insiemi saturi. 2)

Segue dalla definizione di embedding. Infatti se F è iniettiva sarà biiettiva sull'immagine, d'altronde F è chiusa e pertanto risulta un omeomorfismo su $F(X)$. 3)

Se F è biiettiva risulta essere un omeomorfismo in quanto, essendo chiusa, avrà inversa continua. 4) □

Proposizione 5.55 – Compatti e convessi di $\mathbb{R}^n$

Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto e convesso e tale che $\mathring{K} \neq \emptyset$. Allora

$$K \approx \overline{B_1(\bar{0})} \qquad \text{e} \qquad \partial K \approx S^{n-1}.$$

Dimostrazione. Sia q un punto interno di K. Tramite la traslazione $x \mapsto x - q$, che è un omeomorfismo di $\mathbb{R}^n$ in se stesso, possiamo supporre che $\bar{0} \in \mathring{K}$. Per definizione di punto interno, esisterà $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(\bar{0})$ è contenuto in K. Tramite la dilatazione $x \mapsto x/\varepsilon$, che è nuovamente un omeomorfismo di $\mathbb{R}^n$ in se stesso, assumiamo che

$$B^n = B_1(\bar{0}) \subset K.$$

La strategia è dimostrare che ogni raggio in partenza dall'origine interseca ∂K esattamente in un punto. Per ipotesi K è compatto, quindi l'intersezione con ogni raggio chiuso è compatta. Pertanto esisterà un punto x_0 in tale intersezione la cui distanza dall'origine è massima. □

6 TOPOLOGIA ALGEBRICA

La topologia algebrica introduce strumenti avanzati che ci permettono di stabilire quando due spazi sono omeomorfi.

Fino a questo momento ci siamo sempre limitati a valutare proprietà topologiche come la connessione e la compattezza per affermare che due spazi non sono omeomorfi. Questa strategia non esaurisce tutti i possibili casi, ecco perché sfrutteremo la topologia algebrica per introdurre nuovi invarianti topologici.

Uno dei primi problemi che ci porremo è quello di dimostrare che non esiste un omeomorfismo da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, in questo caso infatti non possiamo usare né la connessione né la compattezza, in quanto entrambi hanno questa proprietà topologica e sono entrambi 2-varietà.

L'idea fondamentale sarà quella di usare dei "cappi", ovvero curve chiuse di base un punto. Tale curve saranno sempre deformabili con continuità in un punto, nel caso di $\mathbb{R}^2$, ma non sarà possibile farlo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ quando il cappio conterrà l'origine.

6.1 OMOTOPIE

Definizione 6.1 – Cappio

Fissato $x_0 \in X$, un *cappio*, o *laccio*, di base x_0 è un'applicazione continua

$$f \colon [0,1] \to X \qquad \text{tale che} \qquad f(0) = x_0 = f(1).$$

Osservazione. In particolare un cappio è una curva chiusa.

Definizione 6.2 – Famiglia di cappi

Fissato $x_0 \in X$, definiamo la famiglia dei cappi di base x_0 come

$$\mathcal{C}_{x_0} = \{\, f \colon [0,1] \to X \mid f \text{ continua e } f(0) = x_0 = f(1) \,\}.$$

Definizione 6.3 – Composizione di cappi

Siano $f, g \in \mathcal{C}_{x_0}$. La composizione $f * g$ dei cappi f, g è un cappio di base x_0 definito come

$$f * g = \begin{cases} f(s) & s \in [0, 1/2] \\ g(2s-1) & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Osservazione. La definizione è ben posta, infatti

$$f * g(0) = f(0) = x_0 \qquad \text{e} \qquad f * g(1) = g(2-1) = g(1) = x_0.$$

Inoltre $f * g$ è continua in quanto è continua in ogni tratto e assume gli stessi valori nelle intersezioni. Infatti $f(2s)$ e $g(2s-1)$ sono continue in quanto composizione di applicazioni continue. Infine

$$\lim_{s\to 1/2^-} f * g(s) = \lim_{s\to 1/2^-} f(2s) = f(1) = x_0,$$
$$\lim_{s\to 1/2^+} f * g(s) = \lim_{s\to 1/s^+} g(2s-1) = g(0) = x_0.$$

Definizione 6.4 – Traccia di una curva

Si definisce *traccia* Γ di una curva f come l'insieme dei punti che appartengo all'immagine di f.

Esempio. Se consideriamo $f, g \in \mathcal{C}_{x_0}$ avremo

$$\Gamma_{f*g} = \Gamma_f \cup \Gamma_g.$$

Esempio. Se consideriamo un generico cappio $f \in \mathcal{C}_{x_0}$ e un omeomorfismo $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$, allora

$$\Gamma_f = \Gamma_{f\circ\varphi}.$$

Definizione 6.5 – Cappio costante

Si definisce *cappio costante* di base x_0 come l'applicazione costante

$$e_{x_0}\colon [0,1] \to X, s \mapsto x_0.$$

Osservazione. Per definizione $\Gamma_{e_{x_0}} = \{x_0\}$.

Definizione 6.6 – Cappio inverso

reso un cappio $f \in \mathcal{C}_{x_0}$ si definisce il *cappio inverso* di f come l'applicazione continua che percorre f nel senso inverso,

$$f^{-1}\colon [0,1] \to X, s \mapsto f(1-s).$$

Osservazione. Per definizione $\Gamma_{f^{-1}} = \Gamma_f$.

Osservazione. Purtroppo $f * f^{-1} \neq e_{x_0}$, infatti $\Gamma_{f*f^{-1}} = \Gamma_f$. In seguito dovremmo quindi introdurre una relazione di equivalenza.

Proposizione 6.7 – Cappi definiti su S^1

Fissato $x_0 \in X$, la famiglia dei cappi di base x_0 coincide con l'insieme delle applicazione continue definite su S^1 di base x_0, ovvero

$$\mathcal{C}_{x_0} = \left\{ f\colon S^1 \to X \;\middle|\; f \text{ continua e } 1 \mapsto x_0 \right\} \qquad \text{con } 1 \in \mathbb{C}.$$

Dimostrazione. Segue dalla condizione $f(0) = f(1) = x_0$. Infatti componendo con l'omeomorfismo esponenziale

$$\exp\colon \frac{[0,1]}{0 \sim 1} \to S^1 \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, s \mapsto e^{2\pi i s} = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s),$$

otteniamo immediatamente la tesi. Infatti $\Gamma_f = \Gamma_{f \circ \exp}$. □

Definizione 6.8 – Omotopia

Due cappi $f, g\colon [0,1] \to X$ di base x_0 si dicono *omotopi*, se esiste un'applicazione continua

$$F\colon [0,1] \times [0,1] \to X, (s,t) \mapsto F(s,t),$$

detta *omotopia*, o *deformazione*, tale che

$$F(s,0) = f(s), F(s,1) = g(s) \qquad \text{e} \qquad F(0,t) = x_0 = F(1,t), \ \forall\ t.$$

Osservazione. Le prime due condizioni ci dicono che F "deforma" il laccio $f(s)$ nel laccio $g(s)$ tramite il parametro t.
La seconda ci dice che la base x_0 viene lasciata fissa.

Osservazione. Per ogni $t_0 \in [0,1]$ fissato, $F(s,t_0)$ è un cappio di base x_0.

Proposizione 6.9 – L'omotopia è una relazione di equivalenza

L'omotopia è una relazione di equivalenza su $\mathcal{C}_{x_0}$, ovvero

$$f \simeq g \iff \exists\ F(s,t)\colon [0,1] \times [0,1] \to X \text{ omotopia fra } f \text{ e } g.$$

Dimostrazione. Verifichiamo le proprietà delle relazioni di equivalenza:

- $f \simeq f$ poiché $F(s,t) = f(s), \forall\ t$ è un'omotopia di f in se stesso.
- $f \simeq g \implies g \simeq f$ poiché se $F(s,t)$ è un'omotopia da f in g, allora $G(s,t) = F(s, 1-t)$ è un'omotopia da g in f.
- $f \simeq_F g, g \simeq_G h \implies f \simeq_H h$ in quanto

$$H(s,t) = \begin{cases} F(s,2t) & 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ G(s,2t-1) & 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

è un'omotopia da f in h.

□

Esempio. In $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ se consideriamo i lacci in figura 6.1 si ha $f \simeq g \not\simeq h$.

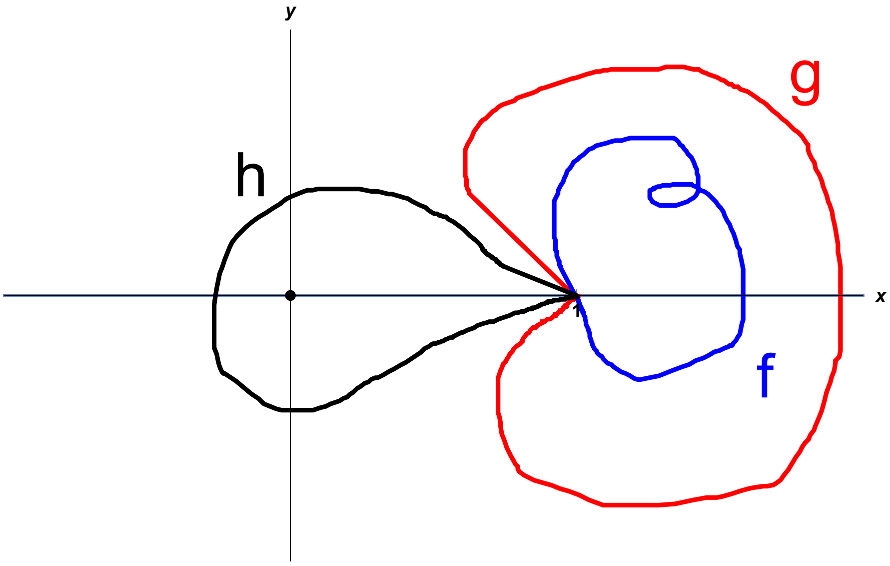

Figura 6.1: Lacci in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ di base $(1,0)$.

Teorema 6.10 – Omotopie fondamentali

Sia $e_{x_0} : [0,1] \to X, s \mapsto x_0$ il cappio costante di base x_0 e siano $f, g, h \in \mathcal{C}_{x_0}$. Allora valgono le seguenti omotopie:

- $f * f^{-1} \simeq e_{x_0} \simeq f^{-1} * f$;
- $(f * g) * h \simeq f * (g * h)$;
- $e_{x_0} * f \simeq f * e_{x_0} \simeq f$.

Dimostrazione. Mostriamo il primo punto, gli altri due si dimostrano in modo analogo. Definiamo l'omotopia H in modo che per ogni tempo t, H percorra $f(t)$ a doppia velocità fintanto che $s \in [0, t/2]$; per $s \in [t/2, 1-t/2]$ resti ferma in $f(t)$; infine per $s \in [1-t/2, 1]$ percorra $f(t)$ in senso contrario al doppio della velocità. Formalmente

$$H(s,t) = \begin{cases} f(2s) & 0 \leqslant s \leqslant t/2 \\ f(t) & t/2 \leqslant s \leqslant 1-t/2 \\ f(2-2s) & 1-t/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

è facile verificare che $H(s,t)$ è un omotopia. Infatti è continua per il lemma di incollamento e valgono

$$H(s,0) = f(0),\ \forall\ s \implies H(s,0) = e_{x_0};$$

$$H(s,1) = \begin{cases} f(2s) & 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ f(1) = x_0 & s = 1/2 \\ f(2-2s) & 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases} \implies H(s,1) = f * f^{-1}(s);$$

e infine

$$H(0,t) = f(0) = x_0 \qquad \text{e} \qquad H(1,t) = f(1) = x_0.$$

□

6.2 GRUPPO FONDAMENTALE

Definizione 6.11 – Gruppo fondamentale

L'insieme quoziente $\mathcal{C}_{x_0}/\simeq$ dei cappi di base x_0, dotato della relazione di omotopia è un gruppo, detto *fondamentale* o *di omotopia* di X in x_0, che si denota con

$$\pi_1(X, x_0) = \left(\frac{\mathcal{C}_{x_0}}{\simeq}, *\right).$$

Osservazione. Questa definizione è ben posta in quanto il teorema precedente ci garantisce che $*$ è compatibile con $\simeq$ e pertanto tale operazione "scende" al quoziente.

Proposizione 6.12 – Isomorfismo tra gruppi fondamentali

Siano $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ due gruppi fondamentali di X. Se esiste un cammino $\gamma\colon I \to X, 0 \mapsto x_0, 1 \mapsto x_1$, allora i due gruppi fondamentali sono isomorfi.

Dimostrazione. Basta considerare l'omomorfismo

$$\hat{\gamma}\colon \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0), f \mapsto \gamma * f * \gamma^{-1},$$

il quale è in particolare un isomorfismo in quanto $\hat{\gamma}(g) = \gamma^{-1} * g * \gamma$. □

Corollario. Se X è arco connesso, esiste un isomorfismo non canonico tra $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ per ogni coppia $x_0, x_1 \in X$.

Osservazione. L'isomorfismo è non canonico in quanto dipende dalla scelta del cammino γ.

Notazione. Quando X è arco connesso, i gruppi fondamentali non vengono più distinti e si scrive $\pi(X)$.

Osservazione. Se x_0, x_1 appartenessero ad arco componenti distinte, non vi sarebbe alcuna relazione tra $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$. Per questa ragione considereremo sempre spazi arco connessi.

Definizione 6.13 – Spazio semplicemente connesso

Uno spazio topologico X si dice *semplicemente connesso* se esiste $x_0 \in X$ tale che

$$\pi_1(X, x_0) = \{[1]\},$$

ovvero il gruppo fondamentale in x_0 è banale.

Osservazione. Naturalmente se tale x_0 esiste, questa proprietà vale per ogni $x \in X$.

Esempio. Per ogni $n \geqslant 1$, $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso. Infatti preso $x_0 = \bar{0}$, avremo che per ogni cappio $f(s)$ di base $\bar{0}$,

$$F(s,t) = t\, f(s),$$

è un'omotopia tra $f(s)$ e $e_{\bar{0}}$. Infatti tale applicazione è ovviamente continua e vale

$$F(s,0) = \bar{0}, F(s,1) = f(s) \qquad \text{e} \qquad F(0,t) = t\, f(0) = \bar{0} = t\, f(1) = F(1,t),\ \forall\ t.$$

Tale omotopia si chiama "straight homotopy".

Osservazione. Se cambio punto base $x_0 \in \mathbb{R}^n$ posso considerare

$$F(s,t) = t\, f(s) + (1-t)x_0,$$

ovvero tale che fissato $s = s_0$, $F(s_0, t)$ percorre il segmento da $f(s_0)$ a x_0.

Osservazione. Se togliamo un punto, ad esempio $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, allora F non è più un'omotopia, in quanto vi sarebbe sempre un segmento passante per l'origine che non appartiene ad X.

Proprietà 6.14. Ogni sottoinsieme convesso $C \subset \mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso.

Proprietà 6.15. Ogni insieme stellato $S \subset \mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso.

Definizione 6.16 – **Cappio contraibile**

Un cappio $f\colon I \to X$ di base x_0, si definisce *contraibile* se è omotopo a e_{x_0}.

Proposizione 6.17 – **Caratterizzazione dei cappi contraibili**

Sia $f\colon S^1 \to X$ un cappio di base x_0. Allora f è contraibile se e soltanto se f si estende ad un'applicazione continua $F\colon D \to X$, dove

$$D = \{\, x \in \mathbb{C} \mid |x| \leqslant 1 \,\},$$

ovvero tale che $F|_{\partial D} = f$.

Dimostrazione. Supponiamo che f si estenda su D. Consideriamo l'omotopia $\Leftarrow)$

$$F\colon S^1 \times I \to X, (\bar{x}, t) \mapsto f(t\,\bar{x}).$$

Pertanto $D \approx \frac{S^1 \times I}{t=0}$.
Se f è contraibile, poniamo $\Rightarrow)$

$$F(x) = \begin{cases} G\left(\frac{x}{\|x\|}, \|x\|\right) & \text{se } x \neq \bar{0} \in \mathbb{C} \\ x_0 & \text{se } x = \bar{0} \in \mathbb{C} \end{cases}$$

che è ben definita in quanto $\frac{x}{\|x\|} \in S^1$ e $0 < \|x\| \leqslant 1$. □

Esempio. Sul toro posso "sfilare" soltanto lacci che si trovano sul bordo di un disco topologico in T^2.

Proposizione 6.18 – Omomorfismo indotto da applicazioni continue

Siano X, Y sue spazi topologici arco connessi. Allora ogni applicazione continua $\varphi \colon X \to Y, x_0 \mapsto y_0$ definisce un omomorfismo (di gruppi) sui gruppi fondamentali,

$$\varphi_* \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0), [f] \mapsto [\varphi \circ f].$$

Dimostrazione. Se f è un cappio di base $x_0 \in X$, allora

$$\varphi \circ f \colon I \to Y, 0 \mapsto \varphi\big(f(0)\big) = y_0, 1 \mapsto \varphi\big(f(1)\big) = y_0,$$

è continua ed è un cappio di base $y_0 \in Y$. Pertanto la composizione con φ manda $\mathcal{C}_{x_0}$ in $\mathcal{C}_{y_0}$.
Osserviamo che φ_* è ben definita sulle classi di equivalenza, infatti se

$$F \colon I \times I \to X, (s,t) \mapsto F(s,t),$$

è un'omotopia in X, allora

$$\varphi \circ F \colon I \times I \to X \to Y, (s,t) \mapsto \varphi \circ F(s,t),$$

è un'omotopia in Y. Pertanto $\varphi_* \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0) = \frac{\mathcal{C}_{y_0}}{\sim}$ è ben definita.
Infine φ_* rispetta il prodotto fra cappi che ricordiamo essere

$$f * g(s) = \begin{cases} f(2s) & s \in [0, 1/2] \\ g(2s-1) & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

da cui, tramite φ_*, avremo

$$(\varphi \circ f) * (\varphi \circ g) = \begin{cases} \varphi \circ f(2s) & s \in [0, 1/2] \\ \varphi \circ g(2s-1) & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

□

Teorema 6.19 – Proprietà funtoriale del gruppo fondamentale

Supponiamo che $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$ siano applicazioni continue fra spazi topologici arco connessi. Allora $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$. Ovvero il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[dr, "(\psi\circ\varphi)_*"'] & \pi_1(Y) \arrow[d, "\psi_*"] \\ & \pi_1(Z) \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Segue banalmente dalla proposizione precedente, infatti, per definizione

$$\varphi_* \colon \pi_1(X) \to \pi_1(Y), [f] \mapsto [\varphi \circ f] \qquad \text{e} \qquad \psi_* \colon \pi_1(Y) \to \pi_1(Z), [g] \mapsto [\psi \circ g],$$

analogamente, dal momento che $\psi \circ \varphi$ è un'applicazione continua da X in Z, resta definita

$$(\psi \circ \varphi)_* \colon \pi_1(X) \to \pi_1(Z), [f] \mapsto [\psi \circ \varphi \circ f].$$

D'altronde, presa $[f] \in \pi_1(X)$, avremo

$$\psi_* \circ \varphi_*([f]) = \psi_*([\varphi \circ f]) = [\psi \circ \varphi \circ f],$$

da cui la tesi. □

Corollario. Se $\varphi\colon X \to Y, x_0 \mapsto y_0$ è un omeomorfismo fra spazi topologici, allora

$$\varphi_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0),$$

è un isomorfismo di gruppi.

Dimostrazione. φ è un omeomorfismo, pertanto ammette inversa φ^{-1} continua. Quindi $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\varphi^{-1}} X$. Per il teorema avremo

- $\varphi_* \circ (\varphi^{-1})_* = (\varphi \circ \varphi^{-1})_* = \mathrm{id}_{\pi_1(Y)}$, ovvero φ_* è suriettiva;
- $(\varphi^{-1})_* \circ \varphi_* = (\varphi^{-1} \circ \varphi)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X)}$, ovvero φ_* è iniettiva.

Quindi φ_* è un isomorfismo di gruppi con inversa $(\varphi^{-1})_*$. □

Osservazione. Da questo corollario segue immediatamente che se $\pi_1(X) \not\simeq \pi_1(Y)$ allora non può esistere alcun omeomorfismo fra X ed Y. Pertanto il gruppo fondamentale è un invariante topologico.

Proposizione 6.20 – **Prodotto finito di gruppi fondamentali**

Il gruppo fondamentale di un prodotto finito di spazi topologici $X_1 \times \ldots \times X_n$ è il prodotto dei gruppi fondamentali.

Dimostrazione. Mostriamolo per due spazi $X \times Y$, il caso generale segue per induzione. Siano $x \in X$ e $y \in Y$ con X, Y spazi topologici arco connessi. Sappiamo quindi che $X \times Y$ è arco connesso.
Consideriamo le proiezioni canoniche

$$p_1\colon X \times Y \to X, (x, y) \mapsto x \qquad \text{e} \qquad p_2\colon X \times Y \to Y, (x, y) \mapsto y,$$

che, in quanto continue, inducono gli omomorfismi

$$p_{1_*}\colon \pi_1\big(X \times Y, (x, y)\big) \to \pi_1(X, x) \qquad \text{e} \qquad \pi_{2_*}\colon \pi_1\big(X \times Y, (x, y)\big) \to \pi_1(Y, y).$$

Definiamo quindi

$$\tilde{p}\colon \pi_1(X \times Y) \to \pi_1(X) \times \pi_1(Y), [f] \mapsto \big(p_{1_*}([f]), p_{2_*}([f])\big).$$

Per ottenere la tesi dobbiamo dimostrare che $\tilde{p}$ è un isomorfismo.

- $\tilde{p}$ è certamente è un omomorfismo in quanto prodotto di omomorfismi.
- $\tilde{p}$ è suriettiva in quanto se $[f] \in \pi_1(X)$ e $[g] \in \pi_1(Y)$, possiamo definire un laccio in $X \times Y$ prendendo
$$F\colon I \to X \times Y, s \mapsto \big(f(s), g(s)\big).$$
Tale laccio è ben definito in quanto $0, 1 \mapsto (x_0, y_0)$. Inoltre $\big(f(s), g(s)\big) = \big(p_1 \circ F(s), p_2 \circ F(s)\big)$, ovvero ogni laccio nel prodotto viene scritto come prodotto di due lacci nei rispettivi spazi.
- $\tilde{p}$ è iniettivo

□

6.3 CATEGORIE E FUNTORI

In questo paragrafo introdurremo alcuni concetti della teoria delle categorie, un potente strumento che ci permette di unificare molti argomenti visti fino a questo momento.

Definizione 6.21 – Categoria

Una *categoria* C è un oggetto che consiste di

- una classe (non necessariamente un insieme) di *oggetti*;
- un insieme di morfismi, dette *frecce*, $\mathrm{Hom}_C(X, Y)$ per ogni coppia di oggetti X, Y;
- una funzione $\mathrm{Hom}_C(X, Y) \times \mathrm{Hom}_C(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_C(X, Z)$, $(f, g) \mapsto g \circ f$ per ogni tripla di oggetti X, Y e Z.

Esempio. Si denota con *Top* la categoria di tutti gli spazi topologici. Gli oggetti di Top sono gli spazi topologici e le sue frecce sono le applicazioni continue.

Esempio. Si denota con *Grp* la categoria di tutti i gruppi. Gli oggetti di Grp sono i gruppi e le sue frecce sono gli omomorfismi.

Definizione 6.22 – Funtore

Siano C, D due categorie. Un funtore F tra C e D è una mappa fra categorie che conserva le strutture.
Ovvero F assegna ad ogni oggetto X in C, un oggetto $F(X)$ in D. Inoltre induce per ogni freccia $f \in \mathrm{Hom}_C(X, Y)$ una freccia $F(f) \in \mathrm{Hom}_D\big(F(X), F(Y)\big)$.

Osservazione. Tramite un funtore le composizioni e le identità vengono mantenute,

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \qquad \text{e} \qquad F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}.$$

Notazione. Quando il funtore è ben definito si usa la notazione g_* per indicare $F(g)$.

Esempio. Il gruppo fondamentale π_1 è un funtore fra le categorie Top e Grp,

$$\pi_1 : \mathrm{Top} \to \mathrm{Grp}, X \mapsto \pi_1(X),$$

inoltre ogni freccia $X \xrightarrow{f} Y$ di Top viene mandata in una freccia $\pi_1(X) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y)$ di Grp.

Osservazione. Abbiamo già osservato come π_1 goda delle proprietà funtoriali. In particolare π_1 manda spazi topologici omeomorfi in gruppi fondamentali isomorfi.

Una domanda che può sorgere spontanea riguarda la suriettività di π_1. La risposta in breve è sì, nonostante la costruzione esplicita di ogni gruppo possa essere particolarmente patologica.

Un fatto molto interessante è che ogni gruppo G finitamente generato è il gruppo fondamentale di una varietà topologica di dimensione 4.

6.4 RETRATTI

Definizione 6.23 – Retratto

Un sottospazio $A \subset X$ si dice *retratto* di X, se esiste un'applicazione continua, detta *retrazione*,

$$r \colon X \to A \qquad \text{tale che} \qquad r(a) = a, \ \forall\, a \in A.$$

Osservazione. Equivalentemente, se consideriamo l'iniezione di A in X e successivamente la sua retrazione

$$A \overset{i}{\hookrightarrow} X \overset{r}{\to} A,$$

si deve avere $r \circ i = \mathrm{id}_A$ e si dice che r "estende" id_A.

Osservazione. Ogni applicazione continua $f \colon A \to Y$ si estende a tutto X tramite la retrazione

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "r"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & A \arrow[r, "f"] & Y, \end{tikzcd}$$

con $f = g|_A$

Esempio. S^{n-1} è un retratto di $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$. Infatti

$$r \colon \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\} \to S^{n-1}, x \mapsto \frac{x}{\|x\|},$$

è una retrazione.

Proposizione 6.24 – Omomorfismo indotto dall'iniezione di un retratto

Sia $A \subset X$ retratto. Allora l'omomorfismo indotto dall'iniezione $i \colon A \hookrightarrow X$,

$$i_* \colon \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a),$$

è iniettivo.

Dimostrazione. Dal momento che r è una retrazione di A, sappiamo che $r \circ i = \mathrm{id}_A$, da cui

$$r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = (\mathrm{id}_A)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(A)},$$

ovvero $r_* \circ i_*$ è l'identità su $\pi_1(A)$. Da cui segue immediatamente che i_* è iniettiva. □

Osservazione. In generale

$$r_* \circ i_* = \mathrm{id}_{\pi_1(A)} \implies \begin{cases} \operatorname{Ker} i_* = \{1\} \\ \operatorname{Im} r_* = \pi_1(A) \\ \operatorname{Im} i_* \cap \operatorname{Ker} r_* = \{1\} \end{cases}$$

vale per qualsiasi isomorfismo.

Teorema 6.25 – Gruppo fondamentale di S^1

Il gruppo fondamentale di S^1 è isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Lo dimostreremo in seguito con la teoria dei rivestimenti. □

Corollario. S^1 non è un retratto del disco $D = \left\{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1 \right\}$ né di $\mathbb{R}^2$.

Dimostrazione. Se $r\colon D \to S^1$ fosse una retrazione, allora $i_*\colon \pi_1(S^1) \to \pi_1(D)$ sarebbe iniettiva. Ma ciò porta ad una contraddizione in quanto $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ e $\pi_1(D) \cong \{1\}$.
Lo stesso ragionamento dimostra che S^1 non è un retratto di $\mathbb{R}^2$. □

Osservazione. D'altronde gli unici lacci $f\colon S^1 \to X$ che si estendono a $g\colon D \to X$ sono i lacci omotopi al laccio costante.

Osservazione. Si può dimostrare, ma non tramite i gruppi fondamentali, che S^{n-1} non è mai un retratto di D^n.

Proprietà 6.26. Un retratto di uno spazio di Hausdorff è chiuso.

Dimostrazione. Supponiamo che A sia un retratto di X tramite r.
Consideriamo $\rho\colon X \to X \times X, x \mapsto \big(x, r(x)\big)$. Ricordiamo che X di Hausdorff implica $\Delta \subset X \times X$ chiuso, dove con Δ indichiamo l'insieme diagonale di X. Ora

$$x \in \rho^{-1}(\Delta) \iff \big(x, r(x)\big) \in \Delta \implies r(x) = x \implies x \in A.$$

Pertanto A è chiuso in quanto $A = \rho^{-1}(\Delta)$. □

Proprietà 6.27. Un retratto di uno spazio connesso è connesso.

Dimostrazione. Supponiamo che A sia un retratto di X tramite r.
r è per definizione continua, quindi $r(X)$ è connesso. D'altronde r è suriettivo, quindi $r(X) = A$. □

Proprietà 6.28. Un retratto di uno spazio compatto è compatto.

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione precedente. □

Proprietà 6.29. Un retratto di uno spazio semplicemente connesso è semplicemente connesso.

Dimostrazione. Supponiamo che A sia un retratto di X tramite r.
Per definizione X è semplicemente connesse se e soltanto se $\pi_1(X, x_0)$ è banale. Ora $r\colon X \to A$ è una retrazione e sappiamo che l'omomorfismo indotto dall'iniezione di A in

X è iniettivo, quindi

$$\pi_1(A, a) \hookrightarrow \pi_1(X, x_0) \implies \pi_1(A, a) = \{1\}.$$

□

Proprietà 6.30. Sia B un retratto di X e A un retratto di B con $A \subset B \subset X$. Allora A è retratto di X.

Dimostrazione. A è un retratto di B, quindi esiste $r_A : B \to A$ tale che $r(a) = a$, $\forall\, a \in A$. Analogamente B è un retratto di X, quindi esiste $r_B : X \to B$ tale che $r_B(b) = b$, $\forall\, b \in B$. Consideriamo quindi $r_a \circ r_b : X \to A$, avremo che

$$r_a \circ r_b(a) = r_a\big(r_b(a)\big) = r_a(a) = a,\ \forall\, a \in A,$$

dove $r_b(a) = a$ in quanto $A \subset B$. Quindi A è un retratto di X. □

6.5 EQUIVALENZA OMOTOPICA

Definizione 6.31 – Omotopia di applicazioni continue

Siano $f, g : X \to Y$ applicazioni continue tra spazi topologici. f e g si dicono *omotope* se e esiste un'applicazione continua, detta omotopia,

$$H : X \times I \to Y, (x, t) \mapsto H(x, t),$$

tale che

$$H(x, 0) = f(x) \qquad \text{e} \qquad H(x, 1) = g(x).$$

Notazione. Scriviamo $f \simeq_H g$ e diciamo che H "deforma" f in g.

Definizione 6.32 – Equivalenza omotopica

Due spazi topologici X e Y si dicono *omotopicamente equivalenti* se esistono due applicazioni continue

$$\varphi : X \to Y \qquad \text{e} \qquad \psi : Y \to X,$$

tali che

$$\psi \circ \varphi \simeq \mathrm{id}_X \qquad \text{e} \qquad \varphi \circ \psi \simeq \mathrm{id}_Y.$$

Osservazione. Moralmente $\psi \simeq \varphi^{-1}$, ma in generale questa scrittura non è rigorosa in quanto φ potrebbe non essere biiettivo.

Osservazione. L'equivalenza omotopica è una relazione di equivalenza.

Proprietà 6.33. Ogni omeomorfismo è un'equivalenza omeotopica.

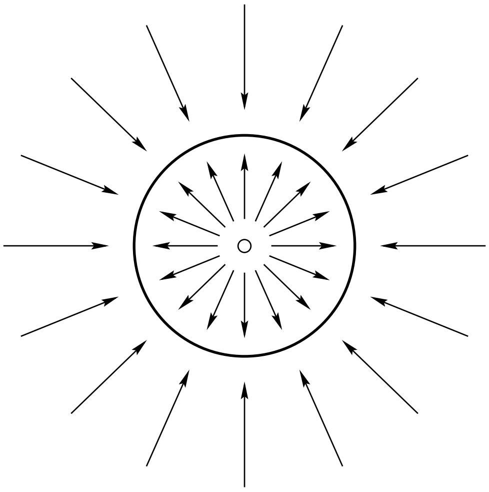

Figura 6.2: Il retratto di deformazione di $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ in S^{n-1}.

Definizione 6.34 – Retratto di deformazione

Un retratto $A \subset X$ si dice *retratto di deformazione* se $i \circ r \colon X \xrightarrow{r} A \xhookrightarrow{i} X$ è omotopicamente equivalente a id_X

Esempio. Abbiamo precedentemente mostrato che S^{n-1} è un retratto di $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$. Tramite

$$H \colon \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\} \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}, (x, t) \mapsto (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|},$$

si dimostra che si tratta di un retratto di deformazione.
Una rappresentazione geometrica dell'azione di H può essere osservata nella figura 6.2.

Proposizione 6.35 – Isomorfismo indotto dall'iniezione di un retratto di deformazione

Sia $A \subset X$ retratto di deformazione. Allora l'omomorfismo indotto dall'iniezione $i \colon A \hookrightarrow X$,

$$i_* \colon \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a),$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. Dalla proposizione 6.24 sappiamo già che i_* è iniettivo, d'altronde

$$i_* \circ r_* = (i \circ r)_* \simeq (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X)},$$

ovvero i_* è anche suriettivo, per cui i_* è biiettivo. □

Esempio. Sappiamo che S^1 è un retratto di deformazione di $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$, quindi, per la proposizione precedente, i gruppi fondamentali di tali spazi sono isomorfi. In particolare sappiamo che $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, pertanto

$$\pi_1\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}\right) \cong \mathbb{Z}.$$

Definizione 6.36 – Spazio contraibile

Uno spazio topologico X si dice *contraibile* se è omotopicamente equivalente a un suo punto.
Ovvero se esite $x_0 \in X$ e $H\colon X \times I \to X$, $(x,t) \mapsto H(x,t)$, tale che

$$H(x,0) = x_0 \qquad \text{e} \qquad H(x,1) = x,\ \forall\, x \in X.$$

Osservazione. In altre parole se e soltanto se $\mathrm{id}_X \simeq (\text{cost})_{x_0}$.

Osservazione. Se X è contraibile allora $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ in quanto ogni cappio è omotopo a quello costante.

Esempio. $\mathbb{R}^n$ è contraibile tramite $H(x,t) = t\,x$, che è infatti un'omotopia fra $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ e il cappio costante nell'origine.

Esempio. Con lo stesso argomento si mostra che $C \subset \mathbb{R}^n$ convesso è contraibile. Infatti è sufficiente traslare C in modo che $\bar{0} \in C$.

Osservazione. Vale analogamente per $S \subset \mathbb{R}^n$ stellato, dove al posto di $\bar{0}$ considereremo il "centro" x_0 di S.

Esempio. Abbiamo già visto che $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\} \simeq S^{n-1}$. In particolare $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ non sarà contraibile.

Osservazione. Per $n \geqslant 3$ si può dimostrare, con altri strumenti, che $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ non è a sua volta contraibile.
In generale vale lo stesso per $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ con $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Esempio. $S^n \setminus \{x_0\}$ è contraibile. Infatti dopo una rotazione di $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ possiamo assumere che $x_0 = N = (0, 0, \dots, 1)$. A questo punto possiamo sfruttare la proiezione stereografica

$$\varphi_N\colon S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n,$$

definita in modo che φ_n mandi x nell'unica intersezione tra il segmento $\overline{N\,x}$ e il piano $x_{n+1} = 0$. Si può infatti mostrare che φ_N è un omeomorfismo tra $S^n \setminus \{N\}$ e $\mathbb{R}^n$, quest'ultimo uno spazio contraibile.

Teorema 6.37 – Invarianza omotopica del gruppo fondamentale

Due spazi topologici X e Y, omotopicamente equivalenti, hanno gruppi fondamentali isomorfi.

6.6 TEOREMA DI VAN KAMPEN

Teorema 6.38 – di Van Kampen (versione debole)

Sia X uno spazio topologico tale che

- $X = U \cup V$ con U, V aperti in X.
- $U \cap V \neq \emptyset$ è connessa per archi.

Se $x_0 \in U \cap V$ è fissato ed entrambe le inclusioni

$$i \colon U \hookrightarrow X \qquad \text{e} \qquad j \colon V \hookrightarrow X,$$

inducono omomorfismi banali i_* e j_* di gruppi fondamentali, allora X è semplicemente connesso.

Dimostrazione. Sia $f \colon [0,1] \to X$ un cappio di base x_0, vogliamo dimostrare che $f \simeq e_{x_0}$. Considerando le componenti connesse di $f(t) \cap U$ possiamo trovare una partizione

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1,$$

tale che $f\big([t_{i-1}, t_i]\big)$ è tutto contenuto in U e $f\big([t_i, t_{i+1}]\big)$ è tutto contenuto in V, per ogni $i = 1, 3, \ldots$ dispari.
La dimostrazione procede per induzione sul numero di partizioni n. La strategia è mostrare che il laccio può essere percorso su ogni partizione che sarà omotopicamente equivalente al laccio costante, ricomponendo il laccio in questo modo si giunge alla tesi.

- $n = 1$: Per costruzione $f\big([0,1]\big) \subset U$, ovvero tutto il cappio f è contenuto in U. Quindi l'omomorfismo i_* manda, per ipotesi, $[f]$ in $[e_{x_0}]$ in quanto $f \in \pi_1(U, x_0)$. Pertanto f è contraibile in X.
- $n = 2$ (figura 6.3): Abbiamo $f(t_1), x_0 \in U \cap V$. Siccome $U \cap V$ per ipotesi è connesso per archi, esiste un cammino g da $f(t_1)$ a x_0.

  La composizione $f\big([0,t_1]\big) * g$ è un laccio tutto contenuto in U. Ma $i_* \colon \pi_1(U, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ è banale, quindi

  $$f\big([0,t_1]\big) * g \simeq e_{x_0} \implies f\big([0,t_1]\big) \simeq g^{-1}.$$

  Per cui $f = f\big([0,t_1]\big) * f\big([t_1, 1]\big) \simeq g^{-1} * f\big([t_1,1]\big)$, il quale è tutto contenuto in V. D'altronde anche $j_* \colon \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ è banale, quindi

  $$f \simeq g^{-1} * f\big([t_1, 1]\big) \simeq e_{x_0},$$

  ovvero f è contraibile in X.
- $n \geqslant 3$: Come nel caso $n = 2$ scegliamo $f(t_{n-1}) \in U \cap V$, che è connesso per archi. Sia quindi g un cammino da $f(t_{n-1})$ a x_0. Quindi $g^{-1} * f\big([t_{n-1}, t_n]\big) \subset V$.

  Per ipotesi induttiva $f\big([0, t_{n-1}]\big) * g$ è contraibile, cioè $g^{-1} \simeq f\big([0, t_{n-1}]\big)$. Quindi

  $$f = f\big([0, t_{n-1}]\big) * f\big([t_{n-1}, t_n]\big) \simeq g^{-1} * f\big([t_{n-1}, t_n]\big),$$

  quest'ultimo tutto contenuto in V. Nuovamente $j_* \colon \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ è banale, per cui

  $$g^{-1} * f\big([t_{n-1}, t_n]\big) \simeq e_{x_0} \implies f \simeq e_{x_0}.$$

  Ovvero f è contraibile in X.

Dal momento che ciò vale per ogni $f \in \pi_1(X, x_0)$ segue immediatamente che X è semplicemente connesso. □

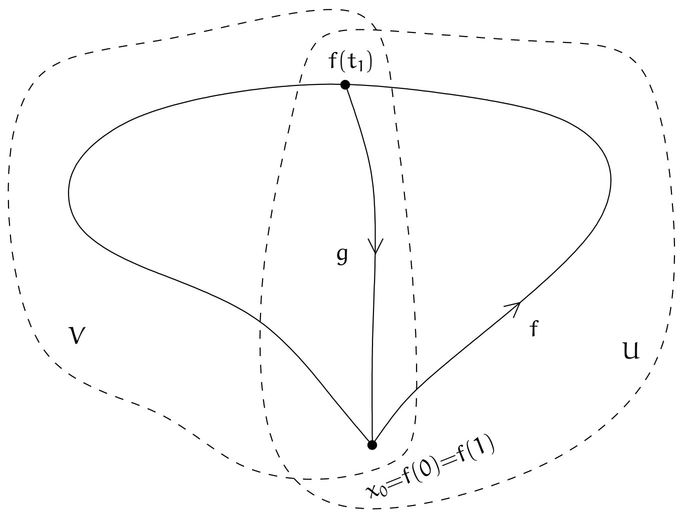

Figura 6.3: La prova del teorema per $n = 2$.

Corollario. Il gruppo fondamentale di S^n è banale quando $n \geqslant 2$.

Dimostrazione. Mostriamo che per $n \geqslant 2, S^n$ è semplicemente connesso. Siano

$$U = S^n \setminus N, N = (0, \ldots, 0, 1) \qquad \text{e} \qquad V = S^n \setminus S, S = (0, \ldots, 0, -1).$$

Dove $U \cap V$ è connesso per archi se $n \geqslant 2$. Infatti sappiamo che, tramite la proiezione stereografica, $S^n \setminus \{x_0\}$ è omeomorfo ad $\mathbb{R}^n$. In particolare $U \cap V \approx \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se e soltanto se $n \geqslant 2$.
D'altronde $U \approx \mathbb{R}^n$ che è contraibile, per cui $\pi(U)$ è banale. In particolare $i_* \colon \pi_1(U) \to \pi_1(S^n)$ è certamente banale. Lo stesso vale per V, quindi $j_* \colon \pi_1(V) \to \pi_1(S^n)$ è banale.
Le ipotesi del teorema sono soddisfatte, quindi $\pi_1(S^n) = \{1\}$ se $n \geqslant 2$. □

Osservazione. La dimostrazione non è valida per $n = 1$ in quanto $U \cap V \approx \mathbb{R} \setminus \{0\}$ che non è semplicemente connesso.

Osservazione. Proponiamo di seguito una pseudo-dimostrazione che S^2 è semplicemente connesso:
Sia $f(t) \subset S^2$ un cappio e sia $y \in S^2 \setminus \{f(t)\}$. Quindi $y \notin \operatorname{Im} f(t)$. Dopo una rotazione possiamo supporre che $y = N = (0, 1)$.
Consideriamo quindi $\pi_N \colon S^2 \setminus N \to \mathbb{R}^2$ la proiezione stereografica. Avremo che $f(t)$ viene mappato in un cappio di $\mathbb{R}^2$ che sarà pertanto contraibile. Quindi $f(t)$ è contraibile e pertanto S^2 è semplicemente connesso.
Questa "dimostrazione" risulta errata in quanto potremmo costruire un cappio in S^2 che sia suriettivo e che quindi non ci permetterebbe di utilizzare l'omeomorfismo con $\mathbb{R}^2$.

Teorema 6.39 – Invarianza del dominio

Supponiamo che $\mathbb{R}^n$ sia omeomorfo ad $\mathbb{R}^m$. Allora $n = m$.

Dimostrazione. Dimostriamo il caso $m = 2$, per dimensioni superiori sono richiesti altri invarianti topologici, come ad esempio la coomologia.
Se per assurdo $n > 2$ ed esistesse un omeomorfismo $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2, p \mapsto \varphi(p)$, allora

$$\mathbb{R}^n \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\varphi(p)\},$$

sarebbe ancora un omeomorfismo. In particolare si avrebbe

$$\begin{array}{ccc} \pi_1\left(\mathbb{R}^n \setminus \{p\}\right) & \cong & \pi_1\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{\varphi(p)\}\right) \\ \cong & & \cong \\ \pi_1(S^{n-1}) = \{1\} & & \mathbb{Z} \end{array}$$

ovvero $\{1\} \cong \mathbb{Z}$ che è ovviamente assurdo. □

7 RIVESTIMENTI TOPOLOGICI

7.1 INTRODUZIONE

Definizione 7.1 – Rivestimento

Siano E, X due spazi topologici. Un'applicazione continua e suriettiva $p \colon E \to X$ si definisce un *rivestimento*, se per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto U_x di x tale che

$$p^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{i \in J} V_i, \qquad \text{con } V_i \text{ aperti in } E.$$

Inoltre vale la proprietà che la restrizione

$$p|_{V_i} \colon V_i \to U_x$$

è un omeomorfismo.

Notazione. L'intorno aperto U_x si dice ben rivestito.

Osservazione. La figura 7.1 mostra un intorno di x ben rivestito. Tale rappresentazione viene anche chiamata "stack of pancakes".

Lemma 7.2. Sia $p \colon E \to X$ un rivestimento. Allora p è un omomorfismo locale suriettivo.

Dimostrazione. Conseguenza diretta della definizione. □

Osservazione. In particolare p risulta essere un'applicazione quoziente.

Lemma 7.3. Sia $p \colon E \to X$ un rivestimento. Allora per ogni $x \in X$ la fibra $p^{-1}(x)$ è un sottospazio topologico di E dotato della topologia discreta.

Dimostrazione. Conseguenza diretta della definizione. □

Lemma 7.4. Sia $p \colon E \to X$ un rivestimento. Se X è connesso e localmente connesso e se esiste $x \in X$ tale che $|p^{-1}(x)| = n < +\infty$, allora

$$|p^{-1}(y)| = n, \ \forall \ y \in X.$$

Dimostrazione. Sia $x \in X$ tale che $|p^{-1}(x)| = n$ e sia $N = \{\, y \in X \mid |p^{-1}(y)| = n \,\}$. Per ipotesi X è connesso e $N \neq \emptyset$, affinchè $N = X$ ci basta dimostrare che N è sia aperto che chiuso.

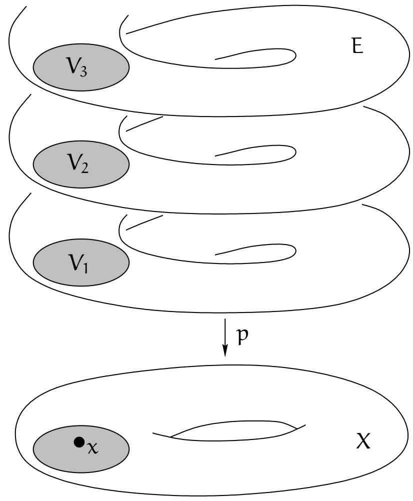

Figura 7.1: Un intorno ben rivestito di $x \in X$.

Per ogni $z \in N$ sia U_z un suo intorno ben rivestito. Quindi

$$p^{-1}(U_z) = \bigsqcup_{i \in J} V_i \qquad \text{e} \qquad p|_{V_i} : V_i \to U_z \text{ è un omeomorfismo.}$$

Pertanto esiste un unico $y_i \in V_i$ tale che $p|_{V_i}(y_i) = z$ per ogni $i \in J$. Osserviamo inoltre che $J = \{1, \dots, n\}$ in quanto per ipotesi $|p^{-1}(z)| = n$. Inoltre per ogni $z' \in U_z$ avremo che $|p^{-1}(z')| = n$, cioè $U_z \subset N$. Ovvero N è aperto in X.
Mostriamo che N è anche chiuso. Se $M = X \setminus N$, allora, con lo stesso ragionamento, si dimostra che per ogni $w \in M$, preso U_w un suo intorno ben rivestito, si ha $U_w \subset M$. Quindi M è un aperto di X, ovvero N è un chiuso di X. □

Definizione 7.5 – Grado della restrizione

Sia $p \colon E \to X$ un rivestimento. Supponiamo che $|p^{-1}(x)| = n$ per qualche $x \in X$. Allora diremo che n è il *grado* di p.

Osservazione. La definizione è ben posta in quanto se esiste $x \in X$ tale che $|p^{-1}(x)| = n$ allora, per il lemma precedente, $|p^{-1}(y)| = n$ per ogni $y \in X$.

Osservazione. Un rivestimento ha grado 1 se e soltanto se è iniettivo, ovvero se e soltanto se è un omeomorfismo.

Esempio (Rivestimento banale)**.** Sia X uno spazio topologico qualsiasi. $p \colon X \sqcup X \to X$ si definisce rivestimento doppio banale.

Osservazione. Per questa ragione, d'ora in poi considereremo E connesso.

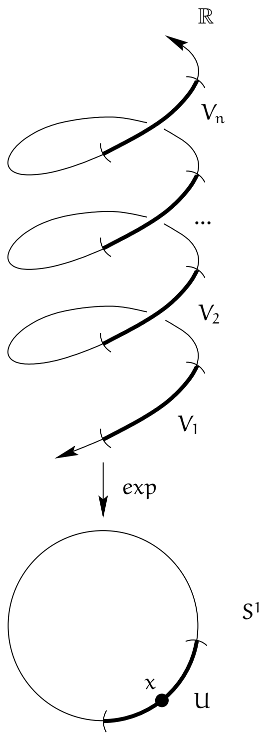

Figura 7.2: Intorni ben rivestiti di S^1.

Esempio. L'applicazione

$$q \colon S^1 \to S^1, e^{2\pi i t} \mapsto e^{4\pi i t},$$

è un rivestimento doppio, ovvero di grado 2, di S^1.

Esempio. Analogamente all'esempio precedente, la restrizione di

$$Z^n \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n,$$

al cerchio unitario S^1, è un rivestimento a n-fogli di S^1.

Esempio. La mappa esponenziale

$$\exp \colon \mathbb{R} \to S^1, t \mapsto e^{e\pi i t} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t),$$

è un rivestimento di S^1.
Dobbiamo mostrare che per ogni punto $x \in S^1$ esiste un intorno U di x che sia ben rivestito, ovvero tale che la sua controimmagine $\exp^{-1}(U)$ sia unione disgiunta di intervalli aperti $V_n \subset \mathbb{R}$, su cui, la restrizione di exp, è un omeomorfismo da V_n a U. Per ogni punto $x \in S^1$ sia $r \in \mathbb{R}$ tale che $\exp(r) = -x$. Consideriamo come intorno di x l'aperto $U = S^1 \setminus \{-x\}$. Avremo che

$$\exp^{-1}(U) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (r+n, r+n+1).$$

In particolare la restrizione $\exp|_{V_n} \colon V_n \to U$ è una mappa certamente aperta e biiettiva, inoltre, essendo continua per definizione, risulta essere un omeomorfismo. Osserviamo inoltre che exp è un rivestimento di grado infinito.

Osservazione. Un modo più intuitivo per comprendere questo rivestimento è considerare exp come la composizione dell'elica cilindrica da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^3$ e la sua proiezione su S^1:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "\text{proiezione}"] \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "\text{elica}"] \arrow[r, "\exp"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

dove l'elica $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}, t \mapsto (e^{2\pi i t}, t)$ è un omeomorfismo sull'immagine. Infatti è iniettivo per via dell'ultima coordinata, inoltre è aperta in quanto l'applicazione inversa

$$(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t) \mapsto t,$$

è continua.
A questo punto è facile mostrare che ogni punto ha un intorno ben rivestito.

7.2 PROPRIETÀ DI SOLLEVAMENTO

Definizione 7.6 – Sollevamento di una restrizione

Sia $p \colon E \to X$ un ricoprimento e sia $f \colon Y \to X$ un'applicazione continua. Un *sollevamento* di f è un'applicazione continua $\tilde{f} \colon Y \to E$ tale che $p \circ \tilde{f} = f$:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Teorema 7.7 – Sollevamento unico

Sia $p \colon E \to X$ un rivestimento tale che $p(e_0) = x_0$. Supponiamo che $f \colon Y \to X$ sia un'applicazione continua con Y connesso e tale che $f(y_0) = x_0$. Se esiste un sollevamento $\tilde{f}$ di f tale che $\tilde{f}(y_0) = e_0$ allora $\tilde{f}$ è unica.

Dimostrazione. Supponiamo che $\tilde{\tilde{f}} \colon Y \to E$ sia un altro sollevamento di punto iniziale e_0, cioè tale che

$$\begin{cases} f(y) = p \circ \tilde{\tilde{f}}(y) \\ \tilde{\tilde{f}}(y_0) = e_0 \end{cases}$$

Definiamo i seguenti insiemi

$$A = \left\{ y \in Y \;\middle|\; \tilde{f}(y) = \tilde{\tilde{f}}(y) \right\} \qquad \text{e} \qquad B = \left\{ y \in Y \;\middle|\; \tilde{f}(y) \neq \tilde{\tilde{f}}(y) \right\}.$$

Chiaramente $A \cup B = Y$ e $A \cap B = \emptyset$. Quindi, dal momento che Y è connesso, basta dimostrare che A e B sono aperti affinché $A = Y$ ed ottenere quindi $\tilde{f} = \tilde{\tilde{f}}$.

osserviamo che $A \neq \emptyset$ in quanto $y_0 \in A$

Sia $\bar{y} \in A$ e sia $f(\bar{y}) = \bar{x} \in X$. Sia U un intorno ben rivestito di $\bar{x}$.
Siccome $\bar{y} \in A$, avremo

$$\tilde{f}(\bar{y}) = \tilde{\tilde{f}}(\bar{y}) \qquad \text{e} \qquad p \circ \tilde{f}(\bar{y}) = p \circ \tilde{\tilde{f}}(\bar{y}) = \bar{x},$$

quindi $\tilde{f}(\bar{y})$ e $\tilde{\tilde{f}}(\bar{y})$ appartengono allo stesso V_i.
Consideriamo l'omeomorfismo $p|_{V_i} \colon V_i \to U$ e poniamo $W = \tilde{f}^{-1}(V_i) \cap \tilde{\tilde{f}}^{-1}(V_i)$. Avremo che $\bar{y} \in W$ e W aperto in Y in quanto intersezione di due aperti.

Infine $W \subset A$ in quanto $p|_{V_i}$ è un omeomorfismo ed è in particolare iniettivo, quindi, per ogni $y \in W$, si ha

$$\left.\begin{aligned} p\big(\tilde{f}(y)\big) &= p \circ \tilde{f}(y) = f(y) \\ p\big(\tilde{\tilde{f}}(y)\big) &= p \circ \tilde{\tilde{f}}(y) = f(y) \end{aligned}\right. \implies \tilde{f}(y) = \tilde{\tilde{f}}(y) \iff y \in A.$$

Quindi ogni punto di A è interno, per cui A è aperto.
Analogamente mostriamo che B è aperto. Sia $\bar{y} \in B$, allora

$$\tilde{f}(\bar{y}) \neq \tilde{\tilde{f}}(\bar{y}) \qquad \text{con} \qquad \tilde{f}(\bar{y}) \in V_i \text{ e } \tilde{\tilde{f}}(\bar{y}) \in V_j, i \neq j.$$

Quindi $W = \tilde{f}^{-1}(V_i) \cap \tilde{\tilde{f}}^{-1}(V_j)$ è un intorno aperto di $\bar{y}$, in quanto intersezione di due aperti, ed è tutto contenuto in B, infatti

$$\begin{tikzcd} & V_i \\ W \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "\tilde{\tilde{f}}"'] & \\ & V_j \end{tikzcd} \qquad \text{con} \qquad V_i \cap V_j = \emptyset.$$

□

Teorema 7.8 – Sollevamento di archi

Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento tale che $p(e_0) = x_0$. Supponiamo che $\alpha\colon [0,1] \to X, 0 \mapsto x_0$ sia un arco di punto iniziale x_0. Allora esiste un unico arco $\tilde{a} \subset E$ di punto iniziale e_0 che solleva α:

$$\begin{cases} \alpha = p \circ \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha}(0) = e_0 \end{cases}$$

Dimostrazione. L'unicità segue dal teorema precedente in quanto $[0,1]$ è connesso. Dobbiamo mostrarne l'esistenza.
Consideriamo il ricoprimento aperto di X costituito dagli intorni ben rivestiti dei suoi punti. Dal momento che α è continua, possiamo costruire un ricoprimento aperto di $[0,1]$ a partire da quello di X. Ora $[0,1]$ è compatto per cui il nostro ricoprimento aperto ammette il numero di Lebesgue. Ciò significa che preso n sufficientemente grande, possiamo prendere

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1,$$

tali che l'immagine di $[t_i, t_{i+1}]$ tramite α è contenuta in un intorno ben rivestito.
Supponiamo che U_0 sia l'intorno ben rivestito di x_0. Sappiamo che $\alpha(0) = x_0$, quindi $\alpha\big([t_0, t_1]\big) \subset U_0$. In particolare

$$p^{-1}(U_0) = \bigsqcup_{i \in J} V_{0_i}, \qquad \text{dove } \exists!\, \bar{i} \in J : e_0 \in V_{0_{\bar{i}}}.$$

Ora $p|_{V_{0_{\bar{i}}}}\colon V_{0_{\bar{i}}} \to U_0$ è un omeomorfismo, quindi esisterà un unico arco

$$\tilde{\alpha}_0\colon [t_0, t_1] \to V_{0_{\bar{i}}}, \qquad \text{tale che } p^{-1} \circ \alpha_0 = \tilde{\alpha}_0,$$

dove con α_0 indichiamo la restrizione di α a $[t_0, t_1]$.
Sia $e_1 = \tilde{\alpha}_0(t_1) \subset E$ il punto finale di $\tilde{\alpha}_0$ e sia U_1 un intorno ben rivestito di $x_1 = p(e_1)$.
Nuovamente

$$p^{-1}(U_1) = \bigsqcup_{i \in J} V_{1_i}, \qquad \text{dove } \exists!\, \bar{i} \in J : e_1 \in V_{1_{\bar{i}}}.$$

Come prima definisco $\tilde{\alpha}_1 = \pi^{-1} \circ \alpha_1$. Osserviamo che $\tilde{\alpha}_1(t_1) = e_1 = \tilde{\alpha}_0(t_1)$.

Iterando ottengo quindi $\tilde{\alpha}\colon [0,1] \to E$ continuo a tratti. D'altronde, per il lemma delle funzioni continue a tratte, $\tilde{\alpha}$ risulta continua in quanto

$$\tilde{\alpha}_i(e_i) = \tilde{\alpha}_{i+1}(e_i), \forall\ i.$$

Per cui α è il sollevamento cercato. □

Teorema 7.9 – Sollevamento di omotopie

Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento tale che $p(e_0) = x_0$. Supponiamo che $\alpha, \beta\colon [0,1] \to X$ siano due archi omotopi di punto iniziale x_0. Allora i loro sollevamenti $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ sono ancora omotopi.

Dimostrazione. Analoga alla precedente. □

Osservazione. In particolare $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ hanno anche gli stessi punti finali.

INDICE ANALITICO

Applicazione
- aperta, 15
- chiusa, 19
- quoziente, 35

Applicazione continua
- tra spazi metrici, 4
- tra spazi topologici, 12

Arco, 45
Azione di gruppo, 40
- libera, 40
- transitiva, 40

Base, 8
Bordo, 20

Cappio, 58
- contraibile, 63

Categoria, 66
Chiusura, 19
Closed map lemma, 56
Compattezza, 50
Complementare, 18
Componenti connesse, 47
Connessione, 42
- per archi, 45
- semplice, 62

Diametro, 55
Disco aperto, 4

Embedding, 27
Equivalenza omotopica, 69
Esteriore, 20

Fibra, 35
Finezza, 8
Funtore, 66
Funzione, 3

Grado della restrizione, 76
Gruppo fondamentale, 62
Gruppo topologico, 38

Insieme
- aperto, 5
- chiuso, 18
- limitato, 53

Interiore, 20
Intorno, 10

Numero di Lebesgue, 55

Omeomorfismo, 14
- locale, 16

Omotopia, 60
- di applicazioni continue, 69

Orbita, 40

Proprietà
- locale, 13

Proprietà topologiche, 15
Punto limite, 22

Relazione di connessione, 47
- per archi, 48

Retratto, 67
- di deformazione, 70

Ricoprimento aperto, 24
Rivestimento, 75

Saturo, 35
Seno topologico, 45
Sollevamento
- di una restrizione, 78

Sottoinsieme
- compatto, 51

Sottoinsieme denso, 22
Sottoricoprimento, 50
Sottospazio
- connesso, 42
- metrico, 4

Sottospazio topologico, 26
Spazio
- compatto, 51
- compatto per successioni, 56
- connesso, 42
- contraibile, 71
- di Hausdorff, 23
- localmente connesso, 49
- localmente euclideo, 23
- metrico, 3
- prodotto, 31
- punto limite compatto, 56
- quoziente, 34
- sconnesso, 42
- semplicemente connesso, 62
- topologico, 6

Spazio delle orbite, 41
Successione, 11
- convergente, 11

Teorema
- del valore medio, 46

  di continuità definita per aperti, 6
  di Heine-Borel, 54
  di Tychonoff, 52
  di Van Kampen, 72
Topologia, 6
  banale, 8
  discreta, 8
  indotta, 26
  indotta dalla metrica, 7
  prodotto, 31
  quoziente, 34
Traccia, 59
Traslazione, 39

Varietà topologica, 24