



Università degli Studi di Roma Tre

FACOLTÀ DI MATEMATICA

APPUNTI INTEGRATIVI

Analisi Complessa

AC310

Di:
Edoardo Signorini

INDICE

1	PROPRIETÀ ELEMENTARI DELLE FUNZIONI OLOMORFE	3
1.1	Differenziazione complessa	4
1.2	Sfera di Riemann	9
1.3	Trasformazioni lineari fratte	10
1.4	Integrali di linea	14
1.5	Teorema di Cauchy	17
2	FORMULA INTEGRALE DI CAUCHY	22
2.1	Introduzione	22
2.2	Derivate superiori	24
2.3	Appendice	28
3	FORMA GENERALE DEL TEOREMA DI CAUCHY	33
3.1	Introduzione	33
3.2	Serie di Laurent	34
3.3	Singolarità isolate	38
4	CALCOLO DEI RESIDUI	44
4.1	Il teorema dei residui	44
4.2	Indicatore logaritmico	46
4.3	Appendice	50
4.4	Formula di inversione di Lagrange	53
5	CALCOLO DI INTEGRALI DEFINITI	55
5.1	Esempi sul teorema dei residui	55
5.2	Esempi con determinazione	59
6	CENNI DI GEOMETRIA IPERBOLICA	61
6.1	Lemma di Schwarz	61
6.2	Automorfismi del disco unitario	62
6.3	Distanza iperbolica	63
6.4	Geodetiche iperboliche	66
6.5	Appendice	68
6.6	Esercizi	69
7	FUNZIONI ARMONICHE	71
7.1	Introduzione	71
7.2	Proprietà principali	73
7.3	Problemi ellittici	74
7.4	Principio di riflessione di Schwarz	77
7.5	Esercizi	81
8	ESTENSIONI ANALITICHE	83
8.1	Introduzione	83
8.2	Prolungamento analitico	85
8.3	Prolungamento analitico lungo una curva	86
9	TEOREMA DELLA MAPPA DI RIEMANN	91
9.1	Compattezza nello spazio delle funzioni oloomorfe	91
9.2	Mappa di Riemann	93
	Indice analitico	96

1 | PROPRIETÀ ELEMENTARI DELLE FUNZIONI OLOMORFE

Rivediamo alcune nozioni basilari dei numeri complessi, andando in particolare a descrivere la relazione che intercorre fra \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 .

Come prima cosa ricordiamo che \mathbb{R}^2 è un'algebra con il seguente prodotto:

$$(x, y)(x', y') = (xx' - yy', yx' + xy').$$

In \mathbb{C} questo prodotto può essere facilmente espresso con la notazione comune

$$(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(yx' + xy').$$

Ricordiamo che la norma di $z \in \mathbb{C}$ è definita come segue

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}},$$

ovvero, se $z = x + iy$,

$$|x + iy| = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|.$$

Grazie alla notazione introdotta all'inizio, è facile mostrare che la norma del prodotto complesso è uguale al prodotto delle norme. Infatti:

$$|(x, y)(x', y')| = |(x, y)| |(x', y')|.$$

Un numero complesso può essere rappresentato in diverse maniere. Una delle più comuni è la rappresentazione sul *piano di Argand*, la quale sfrutta la relazione fra \mathbb{R}^2 e \mathbb{C} che fra poco andremo a dimostrare. Essa associa al numero complesso $z = x + iy$ il punto (x, y) sul piano cartesiano.

Un'altra celebre rappresentazione dei numeri complessi, detta *rappresentazione polare di Gauss*, sfrutta la possibilità di individuare un punto sul piano cartesiano tramite coordinate polari in maniera univoca:

$$z = \rho e^{i\vartheta}, \quad \text{con } \rho = |z| \quad \text{e} \quad \vartheta = \arg z.$$

Da questa notazione è possibile intuire che alla moltiplicazione in \mathbb{C} è associata una rotodilatazione in \mathbb{R}^2 . Ovvero, preso un numero complesso $\alpha \in \mathbb{C}$, vi è associato il seguente operatore lineare:

$$M_\alpha: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z \cdot \alpha.$$

Tramite la rappresentazione polare, se $\alpha = \rho e^{i\vartheta}$ e $z = \tilde{\rho} e^{i\tilde{\vartheta}}$, si ha

$$M_\alpha: \tilde{\rho} e^{i\tilde{\vartheta}} \mapsto \rho \tilde{\rho} e^{i(\vartheta + \tilde{\vartheta})}.$$

Ad esempio se $\alpha = e^{i\pi/3}$, allora M_α è una rotazione di $\frac{\pi}{3}$.

Mostriamo ora la corrispondenza biunivoca fra \mathbb{R}^2 e \mathbb{C} in maniera formale. Definiamo quindi la seguente applicazione:

$$j: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + iy.$$

Se adesso consideriamo l'operatore lineare della moltiplicazione M_α , deve necessariamente esistere una matrice A tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{M_\alpha} & \mathbb{C} \\ j \uparrow & & \uparrow j \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

un algebra è uno spazio vettoriale con una struttura di prodotto

Per quanto detto, sappiamo già che la matrice deve corrispondere ad una roto-dilatazione. Per trovarla esplicitamente assumiamo che il diagramma commuti, avremo:

$$A = j^{-1} M_{\alpha} j,$$

posto $\alpha = a + i b$, segue

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= j^{-1} M_{\alpha} j \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = j^{-1} M_{\alpha} (x + i y) = j^{-1} [\alpha(x + i y)] \\ &= j^{-1} [(a x - b y) + i(a y + b x)] = \begin{pmatrix} a x - b y \\ a y + b x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da cui

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

dove $\vartheta = \arg \alpha$.

1.1 DIFFERENZIAZIONE COMPLESSA

In questo paragrafo forniremo alcune definizioni elementari che verranno adottate per il resto del corso.

Definizione 1.1 – Disco aperto

Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ e sia $r > 0$, si definisce il *disco aperto* centrato in z_0 di raggio r come

$$D(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Notazione. Analogamente si definisce con $\overline{D}(z_0; r)$ il disco chiuso centrato in z_0 di raggio r .

Osservazione. Su \mathbb{C} è definita la topologia indotta dalla topologia euclidea di \mathbb{R}^2 . Pertanto le palle aperte di \mathbb{C} sono precisamente $D(z_0; r)$ con $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$.

Definizione 1.2 – Funzione differenziabile in \mathbb{C}

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione definita su $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto e sia $z \in A$. f si dice *differenziabile* in z se esiste $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che

$$f(z + h) - f(z) = \alpha \cdot h + g(h), \quad \forall h : z + h \in A \quad \text{con} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|g(h)|}{|h|} = 0$$

Notazione. Diremo che f è olomorfa in z .

Osservazione. Se tale α esiste, avremo che $f'(z) = \alpha$.

Esempio. Sia $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto az + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$. Dalla definizione segue direttamente

$$f(z+h) - f(z) = ah.$$

Da cui $f'(z) = a$.

Definizione 1.3 – Funzione olomorfa

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione definita su $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto. f si dice *olomorfa* in A se è differenziabile in ogni punto $z \in A$.

Notazione. Se f è olomorfa in A , scriveremo

$$f \in H(A).$$

Definizione 1.4 – Funzione intera

Una funzione $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ si definisce *intera* se è olomorfa su tutto \mathbb{C} .

Osservazione. Le funzioni olomorfe sono in particolare funzioni differenziabili in \mathbb{R}^2 , l'opposto è generalmente falso. Tramite la prossima proposizione mostreremo infatti che esse corrispondono solo a quelle le cui derivate sono roto-dilatazioni.

Proposizione 1.5 – Equazioni di Cauchy-Riemann

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{C}, x+iy \mapsto u(x,y) + iv(x,y)$ una funzione definita su $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto, con u, v funzioni reali. Supponiamo che f sia differenziabile in $z_0 = x_0 + iy_0$, allora u, v sono derivabili parzialmente in x_0, y_0 e sussistono le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \partial_x u(x_0, y_0) = \partial_y v(x_0, y_0) \\ \partial_y u(x_0, y_0) = -\partial_x v(x_0, y_0) \end{cases}$$

Dette equazioni di Cauchy-Riemann.

Dimostrazione. Per quanto detto a proposito delle funzioni olomorfe in un punto, avremo

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}.$$

Per ipotesi tale limite esiste, supponiamo $f'(z_0) = a + ib$. Scegliamo ora $h = (h_x, 0)$, avremo

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{u(x_0+h_x, y_0) - u(x_0, y_0) + i[v(x_0+h_x, y_0) - v(x_0, y_0)]}{h_x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Dal momento che il limite esiste la parte reale converge alla parte reale del limite, e quella immaginaria converge alla parte immaginaria, ovvero:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = a \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = b.$$

moltiplicando
sopra e sotto per
-i

Analogamente se scegliamo $h = (0, h_y)$, avremo

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h_y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + h_y) - u(x_0, y_0) + i [v(x_0, y_0 + h_y) - v(x_0, y_0)]}{i h_y} \\ &= \lim_{h_y \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + h_y) - v(x_0, y_0) - i [u(x_0, y_0 + h_y) - u(x_0, y_0)]}{h_y} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Da cui

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = a \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -b.$$

Per cui le derivate parziali di u, v soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann. \square

Esempio. La funzione $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z} = x - iy$ ha parte reale $u = x$ e parte immaginaria $v = -y$, da cui

$$\partial_x u \equiv 1 \neq -1 \equiv \partial_y v.$$

Per cui f non è olomorfa in nessun punto. D'altronde se proviamo ad applicare la definizione, otteniamo

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} \\ &= \lim_{l+ik \rightarrow 0} \frac{l-ik}{l+ik}, \end{aligned}$$

dove chiaramente quest'ultimo limite non esiste.

Proposizione 1.6 – Funzione olomorfa è continua

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione su $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto e sia $z \in A$. Se f è olomorfa in z allora f è continua in z .

Dimostrazione. Per ipotesi f è olomorfa in z quindi esiste $f'(z)$, da cui

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(z+h) - f(z)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} h = f'(z) \cdot 0 = 0.$$

Dove l'ultima uguaglianza vale in quanto il limite del prodotto è il prodotto dei limiti. \square

Proposizione 1.7 – Regole di differenziazione

Siano $f, g: A \rightarrow \mathbb{C}$ funzioni su $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto e sia $z \in A$. Supponiamo che f, g siano olomorfe in z , allora:

1. $f + g$ è olomorfa in z e

$$(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$$

2. $f g$ è olomorfa in z e

$$(f g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

3. Se $g(z) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ è olomorfa in z e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$$

Dimostrazione. Segue dalla definizione di funzione olomorfa. □

Esempio. Mostriamo che se $f(z) = z^n$ allora $f'(z) = n z^{n-1}$. Se $n \geq 0$ allora si dimostra facilmente tramite induzione, descriviamo il procedimento per $n = 2$: Abbiamo quindi $f(z) = z^2$, ovvero $f(z) = g(z)h(z)$ con $g(z) = h(z) = z$. Per le regole precedenti avremo

$$f'(z) = g'(z)h(z) + g(z)h'(z) = z + z = 2z.$$

Per $n < 0$ si procede in maniera analoga. Vediamo cosa accade per $n = -1$:

$$\frac{1}{z+h} - \frac{1}{z} = -\frac{h}{z(z+h)} = -\frac{h}{z^2} + \frac{h^2}{z^2(z+h)}, \quad \text{con } \frac{h^2}{z^2(z+h)} = o(h).$$

da cui $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

Esempio (Mappa di Koebe). Consideriamo la mappa

$$f: \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{z}{(1+z)^2}.$$

Per prima cosa osserviamo che vi è una simmetria rispetto al disco unitario, infatti

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1/z}{(1+1/z)^2} = \frac{1}{z \frac{(1+z)^2}{z^2}} = \frac{z}{(1+z)^2} = f(z).$$

Inoltre se z appartiene alla circonferenza unitaria, ovvero $|z| = 1 \implies z\bar{z} = 1$, si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{(1+z)^2} = \frac{z\bar{z}}{(1+z)^2\bar{z}} = \frac{1}{(1+z)^2\bar{z}} = \frac{1}{(1+2z+z^2)\bar{z}} \\ &= \frac{1}{\bar{z} + 2 + z} = \frac{1}{2(1 + \Re(z))}. \end{aligned}$$

Ora, ricordando che $|z| = 1 \implies \Re(z) \in [-1, 1]$, avremo

$$f(z) \in \left[\frac{1}{4}, +\infty\right), \quad \text{se } |z| = 1.$$

A questo punto possiamo mostrare che $f: D \rightarrow \mathbb{C} \setminus [\frac{1}{4}, +\infty)$ è biolomorfa. Inoltre, una volta dimostrato quanto sopra, per simmetria anche $f: \overline{D}^c \rightarrow \mathbb{C} \setminus [\frac{1}{4}, +\infty)$ risulterà biolomorfa.

- f è iniettiva poiché $f(z) = w$ è un'equazione di secondo grado, ma le due soluzioni si trovano sempre una dentro e una fuori dal disco unitario.
- f è suriettiva poiché è possibile risolvere $f(z) = w$ in funzione di w .
- f è olomorfa poiché è quoziente di mappe olomorfe
- L'inversa di f è olomorfa in quanto si mostra che $f'(z) \neq 0$ se $|z| \neq 1$. Questo significa che come mappa da \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 la derivata è una roto-dilatazione non nulla. Poiché le roto-dilatazioni sono invertibili e $f \in C^1$ possiamo applicare il teorema della funzione inversa e ottenere che localmente vi è una sola funzione inversa di f di classe C^1 . D'altronde l'inversa che abbiamo ottenuto risolvendo $f(z) = w$ è globale, quindi, per l'unicità, essa deve coincidere con l'inversa locale. Ovvero esiste inversa globale di classe C^1 .

In conclusione scriviamo lo sviluppo di Taylor di f . Per farlo assumeremo, dimostrandolo in seguito che sia lecito il passaggio della derivata all'interno di una serie complessa.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{(1+z)^2} = z \left(\frac{1}{1+z} \right)^2 = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1+z} \right) = -z \frac{d}{dz} \sum_{n \geq 1} (-1)^n z^n \\ &= -z \sum_{n \geq 1} (-1)^n n z^{n-1} = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} n z^n, \end{aligned}$$

che è una serie con raggio di convergenza 1.

Esercizio 1.1 (Esercitazione 04/10). Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $|f|$ è costante. Allora f è olomorfa se e soltanto se f è costante.

⇒)

Dimostrazione. Supponiamo che f sia olomorfa e scriviamo $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Per ipotesi $|f|$ è costante, per cui $u^2 + v^2 = C$. Possiamo inoltre supporre $C \neq 0$. In particolare avremo

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(u^2 + v^2) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}(u^2 + v^2) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2u \partial_x u + 2v \partial_x v = 0 \\ 2u \partial_y u + 2v \partial_y v = 0 \end{cases}$$

applicando le equazioni di Cauchy-Riemann otteniamo

$$\begin{cases} u \partial_x u - v \partial_y u = 0 \\ u \partial_y u + v \partial_x u = 0 \end{cases} \implies (u \partial_x u - v \partial_y u)^2 + (u \partial_y u + v \partial_x u)^2 = 0$$

da cui

$$u^2(\partial_x u)^2 + v^2(\partial_y u)^2 - \cancel{2uv \partial_x u \partial_y u} + u^2(\partial_y u)^2 + v^2(\partial_x u)^2 + \cancel{2uv \partial_x u \partial_y u} = 0$$

raccogliendo

$$u^2[(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2] + v^2[(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2] = 0 \iff (u^2 + v^2)[(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2] = 0,$$

da cui, sapendo che $u^2 + v^2 \neq 0$,

$$(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 = 0 \implies \partial_x u, \partial_y u = 0,$$

ovvero u è costante. D'altronde per Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \partial_x u = 0 \\ \partial_y u = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \partial_x v = 0 \\ \partial_y v = 0 \end{cases}$$

ovvero v costante. Quindi f risulta costante.
Banalmente vero. □ \Leftarrow

Esercizio 1.2 (Esercitazione 04/10). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Definiamo $\bar{\Omega} = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} \in \Omega\} = \mathfrak{I}(\Omega)$. Preso $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definiamo inoltre

$$g: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \overline{f(\bar{z})}.$$

Allora f è olomorfa in Ω se e soltanto se g è olomorfa in $\bar{\Omega}$.

Dimostrazione. Chiaramente basta mostrare il "solo se", nel viceversa è sufficiente applicare nuovamente la funzione; ovvero basta definire $h(z) = \overline{g(\bar{z})} = f(z)$.

Supponiamo quindi che f sia olomorfa in Ω e applichiamo la definizione di funzione olomorfa a g :

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow 0} \frac{g(z+w) - g(z)}{w} &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\overline{f(\overline{z+w})} - \overline{f(\bar{z})}}{w} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\overline{f(\bar{z} + \bar{w})} - \overline{f(\bar{z})}}{w} = \lim_{w \rightarrow 0} \overline{\left(\frac{f(\bar{z} + \bar{w}) - f(\bar{z})}{\bar{w}} \right)} \\ &= \overline{\lim_{\bar{w} \rightarrow 0} \frac{f(\bar{z} + \bar{w}) - f(\bar{z})}{\bar{w}}} = \overline{f'(\bar{z})} \\ &= f'(z), \end{aligned}$$

per cui $g'(z) = \overline{f'(\bar{z})}$, ovvero g è olomorfa in z per ogni $z \in \bar{\Omega}$. □

1.2 SFERA DI RIEMANN

Definizione 1.8 – Sfera di Riemann

La *sfera di Riemann*, o piano complesso esteso, viene definita aggiungendo un "punto all'infinito" al piano complesso

$$\Sigma = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Osservazione. Tramite la proiezione stereografica, si può mostrare che il piano complesso esteso è effettivamente una sfera dal punto di vista topologico. Preso un punto $P = (x, y, z)$ sulla sfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ si considera la sua proiezione sul piano tramite il segmento congiungente con il polo NORD $(0, 0, 1)$. La funzione di proiezione ricordiamo essere

$$\varphi: (x, y, z) \mapsto \frac{x + iy}{1 - z}.$$

Si mostra quindi che $\varphi: \Sigma \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ è continua, in particolare per il polo NORD $N = (0, 0, 1)$ si ha

$$\lim_{(x,y,z) \in \Sigma \rightarrow N} |\varphi(x, y, z)| = +\infty.$$

Definizione 1.9 – Intorni del punto all'infinito

Gli intorni di ∞ vengono definiti come i complementari delle palle dell'origine. Pertanto una base di tali intorni è

$$\{ B(0; r)^c \}_{r>0}.$$

Osservazione. Con tali intorni $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ è compatto. Infatti se consideriamo una successione $\{x_n\}$ avremo, nel caso che sia limitata un punto di accumulazione per Bolzano-Weierstrass; nel caso in cui sia illimitata troveremo una sottosuccessione x_{n_h} tale che

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} |x_{n_h}| = +\infty,$$

che per la nostra definizione degli intorni di ∞ implicherà $x_{n_h} \rightarrow \infty$.

Esempio. Consideriamo $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z + \frac{1}{z}$. Tale mappa presenta chiaramente una discontinuità nell'origine. Può essere estesa ad una mappa continua se estendiamo \mathbb{C} a $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e ponendo $f(0) = \infty$. f risulterà quindi continua perché $f(z) \rightarrow \infty$ per $z \rightarrow 0$, ovvero

$$\lim_{z \rightarrow 0} |f(z)| = +\infty.$$

1.3 TRASFORMAZIONI LINEARI FRATTE**Definizione 1.10 – Trasformazione lineare fratta**

Si definisce *trasformazione lineare fratta* una mappa del tipo

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}, z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e determinante non nullo $ad - bc \neq 0$.

Osservazione. Tali mappe sono oloedre su $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ o su tutta la sfera di Riemann.

Osservazione. Il determinante viene chiesto non nullo affinché f non risulti costante.

Esempio. La mappa

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

è una lineare fratta

Proprietà 1.11. La composizione di lineari fratte è ancora una lineare fratta.

Dimostrazione. Basta verificare algebricamente la seguente identità:

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ f \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

□

Proprietà 1.12. Le lineari fratte sono invertibili e le loro inverse sono ancora lineari fratte.

Dimostrazione. Nuovamente basta verificare un'identità:

$$f^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1},$$

ricordando che il determinante delle matrici associate è non nullo. □

Osservazione. Come immediata conseguenza delle precedenti due proprietà possiamo affermare che le lineari fratte costituiscono un gruppo per composizione.

Proprietà 1.13. Il gruppo delle lineari fratte è omomorfo a $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$.

Notazione. $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ è il gruppo delle matrici 2×2 invertibili con la relazione di equivalenza che identifica le matrici a meno di un coefficiente costante.

Proprietà 1.14. Una lineare fratta $f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ può avere un punto fisso (se $c = 0$), due punti fissi, oppure fissare tutto il piano risultando l'identità.

Proprietà 1.15. Siano f, g due lineari fratte e supponiamo che $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ siano punti distinti tali che

$$f(z_1) = g(z_1); \quad f(z_2) = g(z_2); \quad f(z_3) = g(z_3).$$

Allora f coincide con g .

Dimostrazione. Per le teorema 1.11 e teorema 1.12 avremo che $g^{-1} \circ f$ è una lineare fratta. Inoltre tale mappa fisserà z_1, z_2, z_3 , segue che $g^{-1} \circ f = \text{Id}$ per la teorema 1.14. Da cui

$$(g^{-1} \circ f)(z) = z, \quad \forall z \implies f(z) = g(z), \quad \forall z. \quad \square$$

Proprietà 1.16. Siano (z_1, z_2, z_3) e (w_1, w_2, w_3) due triple di punti in \mathbb{C} . Allora esiste un'unica lineare fratta f tale che

$$f(z_1) = w_1; \quad f(z_2) = w_2; \quad f(z_3) = w_3.$$

Dimostrazione. L'unicità segue banalmente dalla teorema 1.15, infatti se vi fossero due lineari fratte che rispettano la tesi, esse dovrebbero coincidere poiché coinciderebbero su tre punti distinti.

Per dimostrare l'esistenza trovo due lineari fratte h e g tali che

$$h: \begin{matrix} z_1 & 0 \\ z_2 & 1 \\ z_3 & \infty \end{matrix} \quad e \quad g: \begin{matrix} w_1 & 0 \\ w_2 & 1 \\ w_3 & \infty \end{matrix}$$

e infine definire $f = g^{-1} \circ h$. Tale f sarebbe infatti una lineare fratta per le teorema 1.11 e teorema 1.12 e soddisferebbe la tesi.

Definisco h come il birapporto $b(z, z_1, z_2, z_3)$, ovvero

$$h(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \frac{z_2 - z_3}{z - z_3},$$

ed analogamente definisco g . □

Teorema 1.17 – del birapporto

Siano z_0, z_1, z_2, z_3 e w_0, w_1, w_2, w_3 quadruple di punti distinti di \mathbb{C} . Se T è una trasformazione lineare fratta, allora

$$b(T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3)) = b(z_0, z_1, z_2, z_3).$$

Viceversa, se $b(w_0, w_1, w_2, w_3) = b(z_0, z_1, z_2, z_3)$, allora esiste una trasformazione lineare fratta T tale che

$$T(z_0) = w_0; \quad T(z_1) = w_1; \quad T(z_2) = w_2; \quad T(z_3) = w_3.$$

⇒)

Dimostrazione. Dalla definizione di birapporto sappiamo che

$$b(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

Definiamo $f_{(z_1, z_2, z_3)}(z) = b(z, z_1, z_2, z_3)$ che risulta essere una lineare fratta. In particolare avremo $b(z_0, z_1, z_2, z_3) = f_{(z_1, z_2, z_3)}(z_0)$. Consideriamo ora $f_{(z_1, z_2, z_3)} \circ T^{-1}$ che sappiamo essere ancora una lineare fratta per le teorema 1.11 e teorema 1.12. Ora

$$f_{(z_1, z_2, z_3)} \circ T^{-1}: \begin{array}{ccc} T(z_1) & z_1 & 0 \\ T(z_2) & \mapsto z_2 & \mapsto 1 \\ T(z_3) & z_3 & \infty \end{array}$$

inoltre

$$f_{(T(z_1), T(z_2), T(z_3))}(z) = \frac{z - T(z_1)}{z - T(z_3)} \frac{T(z_2) - T(z_3)}{T(z_2) - T(z_1)} \implies \begin{array}{ccc} T(z_1) & 0 \\ T(z_2) & \mapsto 1 \\ T(z_3) & \infty \end{array}$$

Quindi, per la teorema 1.15, avremo $f_{(z_1, z_2, z_3)} \circ T^{-1} = f_{(T(z_1), T(z_2), T(z_3))}$, da cui

$$\begin{aligned} f_{(z_1, z_2, z_3)}(z) &= (f_{(T(z_1), T(z_2), T(z_3))} \circ T)(z) \iff \\ &\iff b(z, z_1, z_2, z_3) = b(T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)), \forall z. \end{aligned}$$

⇐)

Definiamo due lineari fratte $f_{(z_1, z_2, z_3)}$ e $f_{(w_1, w_2, w_3)}$ come fatto nella prima parte della dimostrazione, in particolare avremo

$$f_{(z_1, z_2, z_3)}: \begin{array}{ccc} z_1 & 0 \\ z_2 & \mapsto 1 \\ z_3 & \infty \end{array} \quad \text{e} \quad f_{(w_1, w_2, w_3)}: \begin{array}{ccc} w_1 & 0 \\ w_2 & \mapsto 1 \\ w_3 & \infty \end{array}$$

A questo punto è sufficiente definire $T = f_{(w_1, w_2, w_3)}^{-1} \circ f_{(z_1, z_2, z_3)}$ affinché si abbia la tesi. □

Teorema 1.18 – Birapporto di punti su una circonferenza

Siano $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Allora il birapporto $b(z_0, z_1, z_2, z_3)$ è reale se e soltanto se i punti z_0, z_1, z_2, z_3 giacciono su una circonferenza o una retta.

Dimostrazione. Supponiamo che z_0, z_1, z_2, z_3 giacciono su una circonferenza. \Leftrightarrow
 Dalle proprietà della notazione polare, osserviamo che se $z = \rho e^{i\vartheta}$ e $z' = \rho' e^{i\vartheta'}$, si ha

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\vartheta - \vartheta')} \implies \arg \frac{z}{z'} = \vartheta - \vartheta' = \arg z - \arg z'.$$

Nel nostro caso avremo che

$$\arg b(z_0, z_1, z_2, z_3) = \arg \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \arg \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_3} - \arg \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3},$$

osserviamo che tale differenza è nulla in quanto i due argomenti individuano angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco.

Viceversa se il birapporto $b(z_0, z_1, z_2, z_3)$ è reale, per quanto appena visto gli angoli individuati dai due argomenti sono uguali e i punti giacciono pertanto su una circonferenza. \Rightarrow
 Osserviamo infine che la retta è un caso limite in quanto costituisce una circonferenza di raggio infinito. □

Corollario. Le trasformazioni lineari fratte conservano l'insieme delle circonferenze e delle rette.

Dimostrazione. Per il teorema precedente sappiamo che un birapporto è reale se e soltanto se i punti giacciono su una circonferenza o su una retta. D'altronde sappiamo per il teorema 1.17 che le lineari fratte conservano i birapporti, da cui la tesi. □

Esercizio 1.3 (Cerchi di Apollonio). Siano $a \neq b \in \mathbb{C}$ e sia $k > 0$. Allora il luogo dei punti

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{|z - a|}{|z - b|} = k \right\},$$

è una circonferenza ortogonale a tutte le circonferenze che passano per a e b .

Dimostrazione. Consideriamo la seguente trasformazione lineare fratta

$$f(z) = k \frac{z - a}{z - b},$$

chiaramente avremo $f(a) = 0$ e $f(b) = \infty$. Osserviamo quindi che le circonferenze per le immagini di a e b non sono altro che le rette per l'origine. Ora dal momento che le lineari fratte mantengono gli insiemi delle circonferenze, avremo che

$$\{ f^{-1}(\text{rette per l'origine}) \} = \{ \text{circonferenze per } a \text{ e } b \}.$$

Ora

$$f^{-1}\{w : |w| = \rho\} = \{z : |f(z)| = \rho\} = \left\{ z : k \frac{|z - a|}{|z - b|} = \rho \right\} = \left\{ z : \frac{|z - a|}{|z - b|} = \frac{\rho}{k} \right\}.$$

Infine tali circonferenze sono ortogonali perché le mappe olomorfe mantengono gli angoli, in quanto le loro derivate sappiamo essere roto-dilatazioni. □

1.4 INTEGRALI DI LINEA

Definizione 1.19 – Integrale di una funzione lungo una curva

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua. Sia $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \Omega)$. Definiamo l'integrale di f lungo γ come

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt.$$

Osservazione. Se $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ e $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b [u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))] [\dot{\gamma}_1(t) + i\dot{\gamma}_2(t)] dt \\ &= \int_a^b [u(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) - v(\gamma(t))\dot{\gamma}_2(t)] + i \int_a^b [v(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) + u(\gamma(t))\dot{\gamma}_2(t)] dt \\ &= \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (v dx + u dy). \end{aligned}$$

Esempio. Supponiamo che $f \equiv 1$, avremo

$$\int_{\gamma} 1 dz = \int_a^b \dot{\gamma}(t) dt \stackrel{\text{TFC}}{=} \gamma(b) - \gamma(a).$$

Esempio. Supponiamo che $f(z) = z$, avremo

$$\int_{\gamma} z dz = \int_a^b \gamma(t) \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \gamma(t)^2 \right] dt = \frac{1}{2} \gamma^2(b) - \frac{1}{2} \gamma^2(a).$$

Proposizione 1.20 – Integrale di funzioni con derivata continua

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa con $f': \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Se $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \Omega)$, allora

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Dimostrazione. La continuità di f' mi garantisce l'esistenza dell'integrale, da cui

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f'(z) dz &= \int_a^b f'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} [f \circ \gamma(t)] dt \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \end{aligned}$$

□

Esempio. Se γ è una curva chiusa, allora per $n \geq 0$ avremo

$$\int_{\gamma} z^n dz = 0.$$

Se poi $0 \notin \gamma([a, b])$, allora l'integrale è nullo anche per $n \leq -2$. Per $n = -1$ ciò è comunque falso, questo poiché non riusciamo a definire $\ln z$ su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Infatti preso $z \in \mathbb{C}$ e posto $\rho = \ln|z|$ avremo che

$$z = |z|e^{i\vartheta} = e^{\ln|z|+i\vartheta} = e^{\rho+i\vartheta} \implies \ln z = \rho + i\vartheta.$$

Da questo capisco che la funzione non è definita in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Volendo sarebbe possibile definirla su $\mathbb{C} \setminus \{z : \Re(z) > 0\}$.

Proposizione 1.21 – Giri di una curva attorno all'origine

Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ una curva chiusa di classe C^1 . Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} \in \mathbb{Z},$$

e possiamo definire tale intero come il numero di giri compiuti dalla curva attorno all'origine.

Dimostrazione. Poniamo

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_a^t \frac{\dot{\gamma}(s)}{\gamma(s)} ds\right).$$

La cui derivata sarà

$$\dot{\varphi}(t) = \exp\left(\int_a^t \frac{\dot{\gamma}(s)}{\gamma(s)} ds\right) \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)} = \varphi(t) \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)} \iff \dot{\varphi}(t)\gamma(t) - \varphi(t)\dot{\gamma}(t) = 0,$$

ovvero

$$\gamma^2(t) \frac{d}{dt} \frac{\varphi(t)}{\gamma(t)} = 0 \iff \frac{d}{dt} \frac{\varphi(t)}{\gamma(t)} = 0, \forall t \in [a, b] \implies \frac{\varphi(t)}{\gamma(t)} = C.$$

In particolare avremo

$$\frac{\varphi(t)}{\gamma(t)} = \frac{\varphi(a)}{\gamma(a)} = \frac{1}{\gamma(a)} \quad \text{e} \quad \frac{\varphi(t)}{\gamma(t)} = \frac{\varphi(b)}{\gamma(b)} = \frac{\varphi(b)}{\gamma(a)},$$

ovvero

$$\frac{1}{\gamma(a)} = \frac{\varphi(b)}{\gamma(a)} \implies \varphi(b) = 1,$$

da cui

$$1 = \exp\left(\int_a^b \frac{\dot{\gamma}(s)}{\gamma(s)} ds\right) \iff \int_a^b \frac{\dot{\gamma}(s)}{\gamma(s)} ds \in 2\pi i \mathbb{Z}. \quad \square$$

Definizione 1.22 – Indice di avvolgimento

Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{w\}$ una curva di classe C^1 . Definiamo l'*indice di avvolgimento* di γ rispetto a w come

$$\text{Ind}(\gamma, w) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-w} \in \mathbb{Z}.$$

Definizione 1.23 – Lunghezza di una curva

Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva di classe C^1 . Definiamo la *lunghezza* di γ come

$$L(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b |dz|.$$

Notazione. Se $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione continua, possiamo definire

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| := \int_a^b f(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \sqrt{\dot{\gamma}_1(t)^2 + \dot{\gamma}_2(t)^2} dt.$$

Proprietà 1.24. Siano $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ e $f \in C(\Omega, \mathbb{C})$. Allora

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|.$$

Dimostrazione. Basta applicare la definizione di integrale lungo una curva e sfruttare le proprietà sul modulo già note:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \overbrace{|\dot{\gamma}(t)|}^{|dz|} dt = \int_{\gamma} |f(z)| |dz|. \quad \square$$

Proprietà 1.25. Siano $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ e $f, g \in C(\Omega, \mathbb{C})$. Se $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, allora

$$\int_{\gamma} [\lambda f(z) + \mu g(z)] dz = \lambda \int_{\gamma} f(z) dz + \mu \int_{\gamma} g(z) dz.$$

Dimostrazione. Basta applicare la linearità alla definizione di integrale di linea. □

Proprietà 1.26. Siano $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ e $f \in C(\Omega, \mathbb{C})$. Supponiamo che $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ sia di classe C^1 e che valgano $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$. Allora

$$\int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Dimostrazione. Segue dalla regola della catena:

posto $s = \varphi(t)$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz &= \int_c^d f(\gamma \circ \varphi(t)) \frac{d}{dt} (\gamma \circ \varphi)(t) dt = \int_c^d f(\gamma \circ \varphi(t)) \dot{\gamma} \Big|_{\varphi(t)} \varphi'(t) dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(s)) \dot{\gamma}(s) ds = \int_{\gamma} f(z) dz \end{aligned} \quad \square$$

Osservazione. Se valesse $\varphi(c) = b$ e $\varphi(d) = a$ si avrebbe

$$\int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz = \int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$$

Notazione. Se $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sono curve di classe C^1 possiamo scrivere

$$\int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_n} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz,$$

ovvero vediamo una curva come un elemento del duale delle funzioni continue su \mathbb{C} .

Proposizione 1.27 – Convergenza degli integrali di linea

Sia $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$ e siano $\gamma_n, \gamma: [a, b] \rightarrow \overline{\Omega}$ curve di classe C^1 . Se $\gamma_n \rightarrow \gamma$ in C^1 allora

$$\int_{\gamma_n} f(z) dz \longrightarrow \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Dimostrazione. Dalla definizione di integrale di linea

$$\int_{\gamma_n} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma_n(t)) \dot{\gamma}_n(t) dt.$$

Sappiamo che f è continua e $\gamma_n \rightarrow \gamma$ uniformemente, per cui $f \circ \gamma_n \rightarrow f \circ \gamma$ uniformemente. Inoltre anche $\dot{\gamma}_n \rightarrow \dot{\gamma}$ uniformemente, per cui sono soddisfatte le ipotesi del passaggio a limite sotto segno di integrale. Ne segue

$$\int_a^b f(\gamma_n(t)) \dot{\gamma}_n(t) dt \rightarrow \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \quad \text{uniformemente.}$$

Ovvero

$$\int_{\gamma_n} f(z) dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz. \quad \square$$

Notazione. Dire che $\gamma_n \rightarrow \gamma$ in C^1 significa che γ_n converge uniformemente a γ insieme alla sua derivata, ovvero

$$\|\gamma_n - \gamma\|_{\text{sup}} + \|\dot{\gamma}_n - \dot{\gamma}\|_{\text{sup}} \rightarrow 0.$$

1.5 TEOREMA DI CAUCHY

In questo paragrafo andremo a dimostrare uno dei principali risultati dell'analisi complessa: il Teorema di Cauchy. In seguito analizzeremo alcuni risultati che discendono immediatamente da questo teorema.

Nella sua forma classica il Teorema di Cauchy afferma che se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ è un aperto semplicemente connesso, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa e γ è una curva chiusa di classe C^1 in Ω , allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

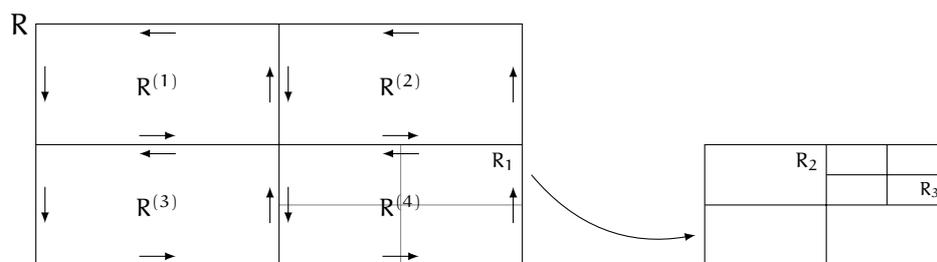


Figura 1.1: Bisezione del rettangolo R.

Questo enunciato ricorda molto da vicino il Teorema di Stokes, abbiamo infatti osservato che l'integrale di una funzione complessa è come fare l'integrale di una 1-forma, che nel nostro caso di funzione olomorfa risulterà chiusa per Cauchy-Riemann.

D'altronde l'enunciato di Stokes che conosciamo non può essere applicato in questo caso, poiché esso richiede che la forma sia di classe C^1 , mentre la nostra funzione è solamente olomorfa, che non ci fornisce informazione riguardo la continuità della derivata.

Procediamo quindi nel dimostrare alcuni lemmi che sfrutteremo nella dimostrazione del teorema.

Lemma 1.28. Sia $f: R \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua definita sul rettangolo R . Se esistono $R_n \subseteq \overset{\circ}{R}$ tali che $R_n \rightarrow R$, allora

$$\int_{\partial R_n} f(z) dz = 0, \forall n \implies \int_{\partial R} f(z) dz = 0.$$

Dimostrazione. Per la teorema 1.27 avremo

$$\int_{\partial R_n} f(z) dz \rightarrow \int_{\partial R} f(z) dz.$$

Questo vale anche se R_n, R sono C^1 solo a tratti, infatti è sufficiente spezzare i rettangoli nei quattro lati che li costituiscono, i quali sono chiaramente curve C^1 , e infine ricomporli dopo aver applicato la proposizione. \square

Teorema 1.29 – di Cauchy per i rettangoli

Sia $R \subseteq \mathbb{C}$ un rettangolo non degenere. Sia $f: \bar{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continua su \bar{R} e olomorfa su $\overset{\circ}{R}$. Allora

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0.$$

Dimostrazione. Possiamo supporre che f sia olomorfa in un aperto che contiene R . Infatti se prendo $R_n \subseteq \overset{\circ}{R}$ con $R_n \rightarrow R$, avrò che f è olomorfa in un aperto che contiene R_n . Per il lemma precedente avremo

$$\int_{\partial R_n} f(z) dz = 0, \forall n \implies \int_{\partial R} f(z) dz = 0.$$

Introduciamo la notazione

$$\eta(R) = \int_{\partial R} f(z) dz,$$

che utilizzeremo anche per ogni rettangolo contenuto in quello di partenza. Se dividiamo R in quattro rettangoli congruenti $R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}, R^{(4)}$, otteniamo che

$$\eta(R) = \eta(R^{(1)}) + \eta(R^{(2)}) + \eta(R^{(3)}) + \eta(R^{(4)}),$$

dal momento che, come è visibile nella figura 1.1, gli integrali si cancellano a vicenda sulle linee in comune. Applicando la triangolare avremo

$$|\eta(R)| = |\eta(R^{(1)}) + \eta(R^{(2)}) + \eta(R^{(3)}) + \eta(R^{(4)})| \leq |\eta(R^{(1)})| + |\eta(R^{(2)})| + |\eta(R^{(3)})| + |\eta(R^{(4)})|,$$

per cui almeno uno dei rettangoli $R^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$, soddisferà la condizione

$$|\eta(R^{(k)})| \geq \frac{1}{4}|\eta(R)|.$$

Chiamiamo tale rettangolo R_1 . Iterando questo processo otteniamo una catena di rettangoli $R \supset R_1 \supset \dots \supset R_n \supset \dots$ con la proprietà

$$|\eta(R_n)| \geq \frac{1}{4}|\eta(R_{n-1})| \implies |\eta(R_n)| \geq \frac{1}{4^n}|\eta(R)|.$$

Poiché la catena di rettangoli è in particolare una catena di compatti, la loro intersezione convergerà ad un punto $z^* \in R$, ovvero R_n sarà contenuto in un intorno $D(z^*, \delta)$ quando n sarà sufficientemente grande. Possiamo inoltre prendere δ abbastanza piccolo affinché f sia definita e olomorfa in $D(z^*, \delta)$. Inoltre, fissato $\varepsilon > 0$, possiamo trovare δ tale che

$$\left| \frac{f(z) - f(z^*)}{z - z^*} - f'(z^*) \right| \leq \varepsilon \quad \text{se } |z - z^*| < \delta,$$

ovvero

$$|f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)| \leq \varepsilon|z - z^*| \quad \text{se } |z - z^*| < \delta. \quad (1.1)$$

Assumiamo quindi che δ soddisfi queste condizioni e che R_n sia contenuto in $D(z^*, \delta)$. Osserviamo inoltre che

$$\int_{\partial R_n} dz = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\partial R_n} z dz = 0.$$

Questi casi particolari sono banalmente veri in quanto 1 e z sono rispettivamente le derivate di z e $z^2/2$ e ∂R_n è una curva chiusa.

Di conseguenza possiamo scrivere

$$\eta(R_n) = \int_{\partial R_n} f(z) dz = \int_{\partial R_n} [f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)] dz,$$

da cui, per la (1.1)

$$|\eta(R_n)| \leq \int_{\partial R_n} \varepsilon |z - z^*| |dz|.$$

Nell'ultimo integrale $|z - z^*|$ è al più uguale al diametro D_n di R_n . Inoltre, se denotiamo con P_n il perimetro di R_n , otteniamo

$$|\eta(R_n)| \leq \varepsilon D_n \int_{\partial R_n} |dz| = \varepsilon D_n P_n.$$

D'altronde se D e P sono rispettivamente il diametro e il perimetro del rettangolo R di partenza, valgono

$$D_n = \frac{D}{2^n} \quad \text{e} \quad P_n = \frac{P}{2^n},$$

da cui

$$|\eta(R_n)| \leq \frac{\varepsilon D P}{4^n} \implies |\eta(R)| \leq \varepsilon D P.$$

Dal momento che ε è arbitrario possiamo solamente avere $\eta(R) = 0$, ovvero la tesi. \square

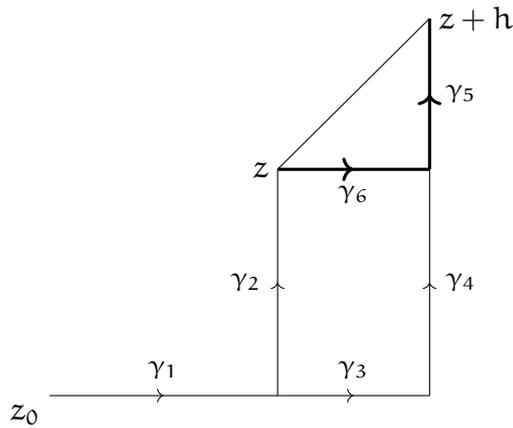


Figura 1.2: Curve per $F(z+h) - F(z)$.

Teorema 1.30 – di Cauchy per i dischi aperti

Siano $D \subseteq \mathbb{C}$ un disco aperto e z_0 il centro di D . Sia $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa in D . Se $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ è una curva chiusa di classe C^1 , allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Dimostrazione. Per la teorema 1.20 è sufficiente trovare $F: D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa tale che $F'(z) = f(z), \forall z \in D$. Definisco quindi

$$F(z) = \int_{\gamma_1} f(w) dw + \int_{\gamma_2} f(w) dw,$$

dove γ_1 consiste nella curva orizzontale da (x_0, y_0) a (x, y_0) e γ_2 in quella verticale da (x, y_0) a (x, y) .

Per mostrare che F è olomorfa e vale $F'(z) = f(z)$, per prima cosa mostriamo $F'(z_0) = f(z_0)$, verificandolo con la definizione di derivata. Posto $h = z - z_0$ avremo

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} [F(z) - F(z_0) - f(z_0)h] \right| &= \left| \frac{1}{h} \left[\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(w) dw - f(z_0)h \right] \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{\gamma_1 + \gamma_2} [f(w) - f(z_0)] dw \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \int_{\gamma_1 + \gamma_2} |f(w) - f(z_0)| |dw| \leq \frac{\varepsilon}{|h|} \int_{\gamma_1 + \gamma_2} |dw| \\ &= \frac{\varepsilon}{|h|} \sqrt{2}|h| = \varepsilon\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f(w) - f(z_0)| &\leq \varepsilon \\ \text{se } |h| &< \delta \end{aligned}$$

Per cui dato ε trovo δ tale che, per $|h| < \delta$, si ha

$$\left| \frac{1}{h} [F(z) - F(z_0) - f(z_0)h] \right| \leq \varepsilon \implies F'(z_0) = f(z_0).$$

Mostriamo adesso il caso generale:

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5} f(w) dw - \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(w) dw,$$

dove $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ sono le curve mostrate in figura 1.2. Ora, il teorema di Cauchy per i rettangoli applicato al rettangolo identificato da $\gamma_2 + \gamma_6 - \gamma_4 - \gamma_3$ ci dice che

l'integrale di f lungo il rettangolo è nullo, per cui

$$\begin{aligned} F(z+h) - F(z) &= \int_{\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5} f(w) dw - \int_{\gamma_2} f(w) dw = \int_{\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5} f(w) dw - \int_{\gamma_2} f(w) dw + \int_{\gamma_2+\gamma_6-\gamma_4-\gamma_3} f(w) dw \\ &= \int_{\gamma_5+\gamma_6} f(w) dw, \end{aligned}$$

che è analogo al caso precedente. □

2 | FORMULA INTEGRALE DI CAUCHY

Una semplice applicazione del teorema di Cauchy ci permette di rappresentare una funzione olomorfa come un integrale di linea. In questo capitolo studieremo le numerose conseguenze di tale formula.

2.1 INTRODUZIONE

Teorema 2.1 – Formula integrale di Cauchy

Sia $f: D(z_0; r) \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e sia γ una curva chiusa in $D(z_0; r) \setminus \{z_0\}$ tale che $\text{Ind}(\gamma, z_0) = 1$. Allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Dimostrazione. Definiamo la seguente funzione

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

tale funzione è continua in $D(z_0; r)$ e inoltre è olomorfa in $D(z_0; r)$ poiché quoziente di funzioni olomorfe e, come vedremo in seguito, z_0 è una singolarità eliminabile. Applicando il teorema di Cauchy otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) 2\pi i \underbrace{\text{Ind}(\gamma, z_0)}_{=1}, \end{aligned}$$

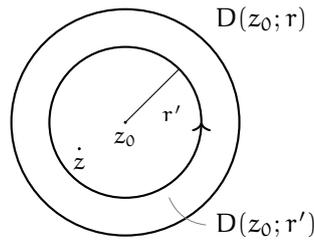
da cui

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad \square$$

Osservazione. In generale quindi il valore di f in un aperto è determinato dal valore di f sul bordo dell'aperto. Da ciò segue che preso $r' < r$, ho che, se $z \in D(z_0; r')$,

allora

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0; r')} \frac{f(w)}{w-z} dw$$



Osservazione. Esistono funzioni $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, dette modificatori, che sono nulle fuori da un compatto, ad esempio

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x^2-1)^2}} & x \in (-1, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se fosse possibile replicare questo comportamento in $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avremmo trovato un controesempio al teorema. Da ciò deduciamo che non esistono modificatori olomorfi, ovvero non esistono funzioni olomorfe nulle fuori da un compatto.

Esempio. Calcoliamo il seguente integrale

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz.$$

Se prendo $f(z) = e^z$, applicando la formula di Cauchy nell'origine ottengo

$$1 = f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz.$$

Per cui il nostro integrale vale $2\pi i$.

Esempio. Calcoliamo il seguente integrale

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 1}.$$

Applichiamo qualche manipolazione

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 1} = \int_{|z|=2} \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) dz = \frac{1}{2i} \left[\int_{|z|=2} \frac{1}{z-i} dz - \int_{|z|=2} \frac{1}{z+i} dz \right],$$

che è la formula di Cauchy applicata a $f(z) = 1$, da cui

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 1} = \pi(1 - 1) = 0.$$

2.2 DERIVATE SUPERIORI

Proprietà 2.2. Le serie di potenze sono olomorfe all'interno del disco di convergenza.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia una serie di potenze del tipo

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n.$$

f converge uniformemente sui compatti di $D(z_0; r)$ dove r è il suo raggio di convergenza. Ora la serie delle derivate

$$\sum_{n \geq 1} n a_n (z - z_0)^{n-1},$$

converge ancora uniformemente sui compatti di $D(z_0; r)$. D'altronde se la serie delle derivate converge uniformemente e la serie delle funzioni converge in un punto, allora la serie delle funzioni converge in un punto e la derivata della serie è la serie delle derivate. \square

Osservazione. In generale ciò significa che le serie di potenze possono essere derivate termine a termine.

Esempio. Consideriamo la funzione esponenziale

$$f(z) = e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!},$$

che ha raggio di convergenza $+\infty$. f è quindi una funzione intera. Scriviamo ora la sua derivata

$$\frac{d}{dz} e^z = \sum_{n \geq 1} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n \geq 1} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

Teorema 2.3 – Funzioni olomorfe sono analitiche

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Preso $z_0 \in \Omega$ sia $D(z_0; r)$ il più grande disco centrato in z_0 e contenuto in Ω . Allora per ogni $z \in D(z_0; r)$ si ha

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{con } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

dove $\gamma = \partial D(z_0; r')$ con $r' < r$.

Dimostrazione. Applicando il teorema di Cauchy ad f otteniamo

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0) - (z - z_0)} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w - z_0} f(w) \frac{dw}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_0} \sum_{n \geq 0} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^n} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w) \sum_{n \geq 0} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \end{aligned}$$

utilizzo la serie
geometrica

dove la serie converge uniformemente in w in quanto

$$\frac{|z - z_0|}{|w - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{r'} < \frac{r'}{r'} = 1.$$

Posso quindi portare la serie fuori dall'integrale ottenendo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq 0} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw (z - z_0)^n = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n. \quad \square$$

Osservazione. Avremmo anche potuto dimostrare che

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw,$$

per ottenere la tesi tramite l'espansione di Taylor.

Esempio. Calcoliamo

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^3(z^{10} - 2)}, \quad \text{dove } \gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi].$$

Poniamo $g(z) = \frac{1}{z^{10} - 2}$ che risulta olomorfa in $B(0; 1 + \varepsilon)$. Applicando la formula di Cauchy per le derivate avremo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(z)}{z^3} dz = \frac{g''(0)}{2!}.$$

Poiché ci troviamo in $B(0, 1 + \varepsilon)$ riusciamo facilmente a scrivere l'espansione di Taylor di g nell'origine, così da non dover calcolare esplicitamente la derivata seconda di g .

$$\frac{1}{z^{10} - 2} = -\frac{1}{2 - z^{10}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{2^{1/10}}\right)^{10}} = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{\sqrt[10]{2}}\right)^{10n}.$$

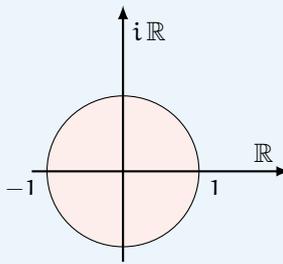
Da cui segue $g''(0) = 0$.

Osservazione. Dal teorema segue che la serie di Taylor converge nel più grande disco $D(z_0; r)$ contenuto in Ω .

Esempio. Consideriamo, su $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1\}$, la funzione

$$f(z) = \frac{1}{1 - z}.$$

Sappiamo che la sua serie di Taylor è la seguente

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} z^n,$$


per cui otteniamo proprio che il suo raggio di convergenza è 1, come ci aspettavamo.

Teorema 2.4 – di Liouville

Se $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione limitata e olomorfa, allora f è costante.

Dimostrazione. Basta dimostrare che $f'(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Usiamo Cauchy per scrivere la derivata prima: posto $\gamma = \partial D(z; r)$ avremo

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw.$$

Per ipotesi sappiamo $|f(w)| \leq M$ per qualche $M \in \mathbb{R}$. Da cui

$|w-z| = r$ in
quanto
 $w \in \partial D(z; r)$

$$\begin{aligned} |f'(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(w)|}{|w-z|^2} |dw| = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(w)|}{r^2} |dw| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{M}{r^2} |dw| \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^2} 2\pi r = \frac{M}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

da cui

$$|f'(z)| = 0, \forall z \in \mathbb{C}. \quad \square$$

Osservazione. In \mathbb{R} questo teorema è falso, si veda il seno come esempio di una funzione limitata che non è costante. D'altronde in \mathbb{C} il seno non è limitato, infatti

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \implies \sin(it) = \frac{\sinh t}{i} \simeq e^{|t|} \quad \text{se } t \text{ è grande.}$$

Esempio. Supponiamo che $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sia olomorfa e tale che $|f(z)| \leq |e^z|$, dimostriamo che $f(z) = a e^z$ per qualche a con $|a| < 1$. Consideriamo

$$g(z) = \frac{f(z)}{e^z}.$$

Per ipotesi avremo

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|e^z|} \leq 1.$$

Quindi per il teorema di Liouville avremo $g(z) \equiv a$, da cui $f(z) = a e^z$.

Corollario. Teorema Fondamentale dell'Algebra.

Dimostrazione. Il teorema di Liouville porta ad una semplice dimostrazione del Teorema Fondamentale dell'Algebra. Infatti se, preso $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ con $\deg P > 0$, supponiamo per assurdo che P non abbia zeri, posso considerare la funzione

$$g(z) = \frac{1}{P(z)},$$

che è intera. Inoltre è limitata per Weierstrass generalizzato, infatti

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |g(z)| = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{1}{|a_n z^n + \dots + a_0|} = 0.$$

Quindi per il teorema di Liouville P risulta costante, ovvero un polinomio di grado 0, che è assurdo per ipotesi. \square

Corollario. Se $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa tale che $\Re(f)$ oppure $\Im(f)$ è limitata, allora f è costante.

Dimostrazione. Supponiamo che $\Re(f)$ sia limitata, ovvero esiste $M > 0$ tale che $|\Re f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbb{C}$. Consideriamo la funzione $g(z) = e^{f(z)}$ che è intera. Inoltre avremo

$$|g(z)| = |e^{\Re f(z)} e^{i \Im f(z)}| = e^{\Re f(z)} \leq e^M.$$

Quindi per il teorema di Liouville avremo g costante, da cui

$$0 = g'(z) = \underbrace{e^{f(z)}}_{\neq 0} f'(z) \implies f'(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C},$$

ovvero f costante. \square

Teorema 2.5 – di Liouville generalizzato

Sia $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che

$$|f(z)| \leq A + B|z|^n, \forall z \in \mathbb{C},$$

allora f è un polinomio di grado al più n .

Dimostrazione. Dimostriamo che $f^{(n+1)} \equiv 0$ utilizzando la formula di Cauchy:

$$f^{(n+1)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}} dw, \quad \text{con } \gamma_R: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto z + R e^{it}.$$

Passando al modulo avremo

$$\begin{aligned} |f^{(n+1)}(z)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z + R e^{it})}{(R e^{it})^{n+2}} R i e^{it} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{A + B|z + R e^{it}|^n}{R^{n+2}} R dt. \end{aligned}$$

Osserviamo che l'argomento dell'integrale tende uniformemente a zero quando $R \rightarrow +\infty$. Per la convergenza uniforme posso portare fuori il limite dall'integrale per ottenere che $|f^{(n+1)}(z)| \leq 0$ quando $R \rightarrow +\infty$, ovvero

$$f^{(n+1)}(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}. \quad \square$$

Esempio. Su \mathbb{R} questo teorema è falso, ad esempio la funzione $f(x) = x^2 + e^{-x^2}$ cresce in modo polinomiale ma non è un polinomio.

Teorema 2.6 – di Morera

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua tale che, per ogni curva chiusa γ in Ω , si abbia

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Allora f è olomorfa in Ω .

Dimostrazione. Fissato $z_0 \in \Omega$ definiamo

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w) dw,$$

dove γ_z soddisfa $\gamma_z(0) = z_0, \gamma_z(1) = z$. Osserviamo che F così definito non dipende dalla curva, infatti se $\tilde{\gamma}$ è un'altra curva che soddisfa $0 \mapsto z_0, 1 \mapsto z$, definisco

$$\hat{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma_z(t) & t \in [0, 1] \\ \tilde{\gamma}(2-t) & t \in [1, 2] \end{cases}$$

che è una curva chiusa su Ω , quindi per ipotesi

$$0 = \int_{\hat{\gamma}} f(w) dw = \int_{\gamma_z} f(w) dw - \int_{\tilde{\gamma}} f(w) dw.$$

A questo punto è sufficiente mostrare che $F'(z) = f(z)$, infatti è facile dimostrare che

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma_h} f(w) dw \simeq f(z)h.$$

Quindi f è la derivata di una funzione olomorfa, pertanto f è anch'essa olomorfa. \square

2.3 APPENDICE

Teorema 2.7 – Proprietà del valor medio

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Prendiamo $z_0 \in \Omega$ e $r > 0$ tale che $D(z_0; r) \subseteq \Omega$, allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\vartheta}) d\vartheta.$$

Dimostrazione. Per la formula di Cauchy sappiamo

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0; r)} \frac{f(w)}{w - z_0} dw.$$

Parametizziamo $\partial D(z_0; r)$ tramite $\gamma_r: [0, 2\pi] \rightarrow \Omega, \vartheta \mapsto z_0 + r e^{i\vartheta}$, da cui

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z_0} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{i\vartheta})}{r e^{i\vartheta}} r i e^{i\vartheta} d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\vartheta}) d\vartheta. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.8 – Principio del massimo modulo

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora $|f|$ non può assumere massimo in $z_0 \in \Omega$ a meno che f non sia costante.

Dimostrazione. Supponiamo che $|f(z_0)| = \sup\{|f(z)| : z \in \Omega\}$, mostriamo che f è costante. Per prima cosa mostriamo che $|f(z)| = |f(z_0)|, \forall z \in \Omega$ tramite un argomento topologico: Definiamo

$$\Omega_1 = \{z \in \Omega : |f(z)| < |f(z_0)|\} \quad \text{e} \quad \Omega_2 = \{z \in \Omega : |f(z)| = |f(z_0)|\}.$$

Chiaramente $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ e $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, mostriamo che tali insiemi sono anche aperti:

- $\Omega_1 = |f|^{-1}((-\infty, |f(z_0)|))$, dove $|f|$ è una funzione continua e $(-\infty, |f(z_0)|)$ è un intervallo aperto. Per cui Ω_1 è aperto in quanto controimmagine di un aperto tramite funzione continua.
- Preso $z_1 \in \Omega_2$ applico il teorema del valor medio:

$$|f(z_1)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_1 + r e^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_1 + r e^{it})| dt.$$

Osserviamo che $z_1 \in \Omega_2 \implies |f(z_1)| = |f(z_0)|$ che è massimo. Quindi $|f(z_1 + r e^{it})| \leq |f(z_1)|$, inoltre se la disuguaglianza fosse stretta anche per un solo valore di t allora lo sarebbe, per continuità, su tutto un intervallo. Ma in tal caso il valore medio di $|f(z_1 + r e^{it})|$, a cui si riferisce l'integrale, sarebbe strettamente minore di $|f(z_1)|$, che contraddirebbe quanto affermato con il teorema del valor medio. Per cui

$$|f(z_1 + r e^{it})| = |f(z_1)|, \forall t \in [0, 2\pi].$$

Ovvero Ω_2 è aperto poiché ogni punto di Ω_2 ha un intorno aperto contenuto in Ω_2 .

Per connessione di Ω avremo quindi $\Omega_1 = \emptyset$ oppure $\Omega_2 = \emptyset$. D'altronde $z_0 \in \Omega_2$ ci dice che $\Omega_2 \neq \emptyset$. Ne segue $\Omega_1 = \emptyset \implies \Omega_2 = \Omega$, ovvero $|f|$ costante.

Mostriamo ora che $|f|$ costante implica f costante: se

$$f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y),$$

definiamo $F(x, y) = u^2(x, y) + v^2(x, y) = |f|^2$ che è quindi costante. In particolare avremo

$$0 = (\partial_x F(x, y) \quad \partial_y F(x, y)) = (2u(x, y) \quad 2v(x, y)) \begin{pmatrix} \partial_x u(x, y) & \partial_y u(x, y) \\ \partial_x v(x, y) & \partial_y v(x, y) \end{pmatrix}$$

abbiamo quindi

$$u(x, y) = v(x, y) = 0 \quad \text{oppure} \quad f'(x, y) = 0,$$

in entrambi i casi f risulta costante. □

Teorema 2.9 – Principio di identità

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso e siano $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ due funzioni olomorfe. Se $f(z_n) = g(z_n)$ e $z_n \rightarrow z_0 \in \Omega$, allora

$$f(z) = g(z) \forall z \in \Omega.$$

Dimostrazione. Posto $h(z) = f(z) - g(z)$, ci basta dimostrare che se $h(z_n) = 0$ e $z_n \rightarrow z_0 \in \Omega$ allora $h(z) = 0 \forall z \in \Omega$. Definiamo quindi i seguenti insiemi e procediamo con l'usuale argomento di connessione:

$$\Omega_1 = \{z \mid z \text{ punto di accumulazione e } h(z) = 0\}$$

e

$$\Omega_2 = \{z \mid h(z) \neq 0 \text{ oppure } z \text{ zero isolato di } h\}.$$

Chiaramente $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ e $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Ci basta quindi dimostrare che Ω_1, Ω_2 sono aperti affinché, per connessione, si abbia che uno dei due insiemi è vuoto. D'altronde $z_0 \in \Omega_1$ per ipotesi quindi $\Omega_1 \neq \emptyset \implies \Omega_1 = \Omega$ da cui la tesi.

- Ω_2 aperto: sia $\bar{z} \in \Omega_2$; se $h(\bar{z}) \neq 0$ per la permanenza del segno esiste $r > 0$ tale che

$$h(z) \neq 0 \forall z \in B(\bar{z}; r),$$

ovvero $B(\bar{z}; r) \subseteq \Omega_2$. Se invece \bar{z} è uno zero isolato di h è tautologico dire che vi è un intorno di \bar{z} che non contiene zeri di h , ovvero trovo $r > 0$ tale che

$$h(z) \neq 0 \forall z \in B(z_0; r) \setminus \{z_0\},$$

da cui $B(z_0; r) \subseteq \Omega_2$.

- Ω_1 aperto: preso $\bar{z} \in \Omega_1$ sviluppiamo h nella sua serie di Taylor attorno a \bar{z} :

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \bar{z})^n \quad \text{per } z \in B(\bar{z}; r)$$

Da $h(\bar{z}) = 0$ segue $a_0 = 0$, in particolare avremo

$$h(z) = a_n (z - \bar{z})^n + a_{n+1} (z - \bar{z})^{n+1} + \dots \quad \text{per } n \geq 1.$$

D'altronde se per assurdo esistesse n tale che $a_n \neq 0$ si avrebbe, per $z \neq \bar{z}$ e $|z - \bar{z}| < \varepsilon$,

$$h(z) = a_n (z - \bar{z})^n + a_{n+1} (z - \bar{z})^{n+1} + \dots = (z - \bar{z})^n [a_n + a_{n+1} (z - \bar{z}) + \dots] \neq 0,$$

in quanto $(z - \bar{z}) \neq 0$ e $l(z) := [a_n + a_{n+1} (z - \bar{z}) + \dots]$ è olomorfa, in particolare continua, da cui

$$|l(z)| \geq \frac{1}{2} |l(\bar{z})| = \frac{1}{2} |a_n| \neq 0.$$

Ma ciò è assurdo in quanto \bar{z} risulterebbe uno zero isolato di h , contraddicendo l'assunto di $\bar{z} \in \Omega_1$. Per cui $a_n = 0, \forall n \implies f(z) = 0, \forall z \in B(\bar{z}; r)$, da cui la tesi. \square

Osservazione. Consideriamo la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \end{cases}$$

Tale funzione è $C^\infty(\mathbb{R})$ ma non coincide con la sua serie di Taylor. Infatti la serie è identicamente nulla mentre la funzione è ben lontana dall'esserlo.

In \mathbb{C} quindi f non è olomorfa per varie ragioni: la prima è che non coincide con la sua serie di Taylor, la seconda come conseguenza del principio di identità.

Osservazione. Il principio di identità è generalmente falso per le funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Consideriamo ad esempio

$$f(x, y) \equiv (0, 0) \quad \text{e} \quad g(x, y) = (y^2, 0).$$

Tali funzioni coincidono sull'asse x ma sono chiaramente distinte.

Definizione 2.10 – Convergenza quasi uniforme

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e sia $\{f_n\}_{n \geq 1} \subseteq C(\Omega)$. Si dice che f_n converge quasi uniformemente a f se vi converge uniformemente su tutti i compatti di Ω .

Proposizione 2.11 – Convergenza quasi uniforme delle serie di potenze

Le serie di potenze convergono quasi uniformemente nel loro disco di convergenza.

Dimostrazione. Supponiamo che la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

converga su $D(0; R)$ dove R è il suo raggio di convergenza. Sia $K \subseteq D(0; R)$ compatto. Per compattezza $K \subseteq D(0; R - \varepsilon)$ per un $\varepsilon > 0$. Andiamo a studiare la convergenza totale della serie su tale disco:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{z \in K} |a_n z^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |R - \varepsilon|^n$$

di cui si può valutare la convergenza tramite il criterio della radice:

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n| |R - \varepsilon|} = \frac{|R - \varepsilon|}{R} < 1.$$

Quindi la serie converge totalmente e di conseguenza uniformemente su K . □

Esempio. La serie

$$\sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!}$$

non converge uniformemente a e^z su \mathbb{C} dal momento che

$$\left\| \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} - e^z \right\|_{\sup} = +\infty.$$

D'altronde converge uniformemente sulle palle.

Teorema 2.12 – Rigidità olomorfa sulla convergenza quasi uniforme

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e sia $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa per ogni n . Se $f_n \rightarrow f$ quasi uniformemente allora f è olomorfa.

Dimostrazione. Fissato $z \in \Omega$, consideriamo $\overline{B(z_0; r)} \subseteq \Omega$ e poniamo $\gamma = \partial B(z_0; r)$. Per la formula di Cauchy avremo

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(w)}{w-z} dw.$$

Osserviamo che $\partial B(z_0; r)$ è compatto, quindi

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(w)}{w-z} dw \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

poiché la convergenza uniforme mi permette di passare il limite nell'integrale di Riemann. Inoltre, per ipotesi, $f_n(z) \rightarrow f(z)$, da cui, per l'unicità del limite,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \text{se } z \in B(z_0; r).$$

Ciò significa che f è olomorfa per la differenziabilità sotto segno di integrale. □

Osservazione. Inoltre si dimostra tramite la formula di Cauchy per le derivate superiori che

$$f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$$

quasi uniformemente in Ω .

3 | FORMA GENERALE DEL TEOREMA DI CAUCHY

Ricordiamo che il teorema di Cauchy affermava che se $f: B(z_0; r) \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa e γ è una curva chiusa in $B(z_0; r)$, allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Questo però non vale al di fuori delle palle, ad esempio per una funzione definita in un aperto non semplicemente connesso come

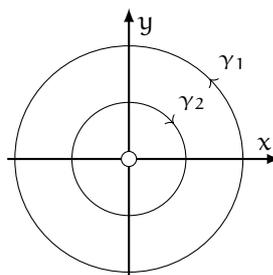
$$f: \Omega \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{z},$$

avevamo osservato che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \text{Ind}(\gamma_1, 0).$$

D'altra parte se considerassimo una seconda curva γ_2 all'interno di γ_1 , percorsa in senso contrario, troveremmo

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = 1 - 1 = 0$$



In questo modo possiamo generalizzare il Teorema di Cauchy per domini non semplicemente connessi.

3.1 INTRODUZIONE

Definizione 3.1 – Catene e cicli

Se $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sono curve C^1 e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, definiamo la seguente somma formale

$$a_1 \gamma_1 + \dots + a_n \gamma_n$$

come *catena*. Se, inoltre, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sono curve chiuse, la somma formale si chiama *ciclo*.

Osservazione. Sappiamo già che possiamo considerare una curva come un elemento del duale delle funzioni continue su \mathbb{C} . Per cui dalla definizione di catena segue

$$\int_{a_1 \gamma_1 + \dots + a_n \gamma_n} f(z) dz = a_1 \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + a_n \int_{\gamma_n} f(z) dz.$$

Dove f è una funzione continua su \mathbb{C} .

Teorema 3.2 – Forma generale del teorema di Cauchy

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto qualsiasi e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Sia Γ un ciclo tale che

$$\text{Ind}(\Gamma, \alpha) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - \alpha} = 0, \forall \alpha \notin \Omega.$$

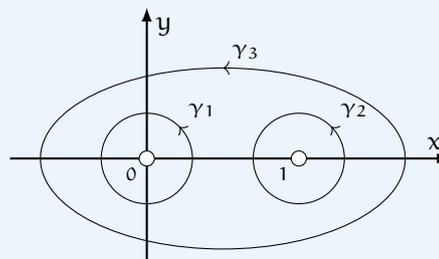
Allora se $z \notin \text{Im}(\Gamma)$ si ha che

$$f(z) \cdot \text{Ind}(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dz \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Dimostrazione. Non fornita ma analoga ai casi già discussi. □

Esempio. Sia $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3$ come mostrato in figura. Consideriamo la seguente funzione

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z(z-1)}$$



Γ soddisfa le ipotesi di Cauchy generalizzato, infatti

$$\text{Ind}(\Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} - \int_{\gamma_3} \frac{dz}{z} \right] = \frac{1}{2\pi i} (1 + 0 - 1) = 0,$$

analogamente si mostra $\text{Ind}(\Gamma, 1) = 0$, da cui

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3} \frac{dz}{z(z-1)} = 0.$$

3.2 SERIE DI LAURENT

Definizione 3.3 – Serie di Laurent

Una serie del tipo

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n,$$

si definisce *serie di Laurent* centrata in $z_0 \in \mathbb{C}$.

Proposizione 3.4 – Convergenza della serie di Laurent

Consideriamo una generica serie di Laurent Σ centrata in $z_0 \in \mathbb{C}$. Siano

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{e} \quad r = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}.$$

Se $r < R$ allora Σ converge in $D(z_0; R) \setminus \overline{D(z_0; r)}$.

Dimostrazione. Supponiamo di scrivere

$$\Sigma = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n.$$

Se consideriamo solo i termini con indice positivo sappiamo che

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

converge in $D(z_0; R)$ dove R come definito nell'ipotesi è il suo raggio di convergenza. D'altronde se consideriamo i termini negativi

$$\sum_{n \leq -1} a_n (z - z_0)^n,$$

avremo che tale serie converge se

$$\frac{1}{|z - z_0|} < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \iff |z - z_0| > r,$$

ovvero in $\mathbb{C} \setminus \overline{D(z_0; r)}$.

Da ciò segue che Σ converge nell'intersezione dei due insiemi di convergenza, rispettivamente della serie con indici positivi e quella con indici negativi. In particolare se $r < R$ tale intersezione è non vuota e Σ converge sulla corona $D(z_0; R) \setminus \overline{D(z_0; r)}$. \square

Osservazione. Si può dimostrare che la corona di convergenza, come nel caso delle serie di potenze, è sempre quella massimale.

Esempio. Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z},$$

che è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Scriviamo la serie di Laurent di f in 0. Per quanto affermato nell'osservazione precedente, tale serie convergerà nelle corone massimali contenute nel dominio, ovvero:

$$D(0; 1) \setminus \{0\} \quad \text{e} \quad \mathbb{C} \setminus \overline{D(0; 1)}.$$

- In $D(0; 1) \setminus \{0\}$ avremo che $|z| < 1$, possiamo quindi sfruttare la serie geometrica per scrivere

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 0} z^n.$$

- In $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0; 1)}$ avremo che $|1/z| < 1$, tramite qualche manipolazione algebrica

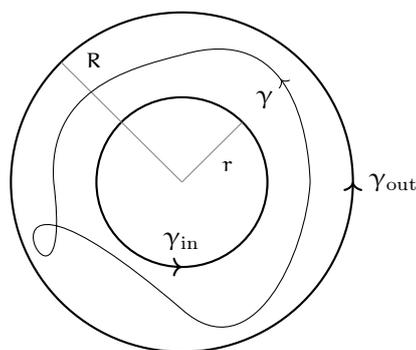


Figura 3.1: Rappresentazione della corona in Ω e delle curve usate nel teorema.

possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \left[1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right] \\ &= - \sum_{n \geq 2} \frac{1}{z^n}. \end{aligned}$$

Teorema 3.5 – Funzioni olomorfe come serie di Laurent

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto contenente la corona $\{z : r < |z - a| < R\}$ con $r < R$. Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - a)^n \quad \text{con } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw.$$

Dove γ è una curva chiusa tale che $\text{Ind}(\gamma, a) = 1$.

Dimostrazione. Definiamo

$$\gamma_{\text{out}} = \partial D(a; R) \quad \text{e} \quad \gamma_{\text{in}} = \partial D(a; r).$$

Possiamo pensare che $\gamma = \gamma_{\text{out}}$ oppure $\gamma = \gamma_{\text{in}}$. Infatti poiché la funzione

$$w \mapsto \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}},$$

è olomorfa nella corona, possiamo applicare Cauchy nel caso generale, da cui

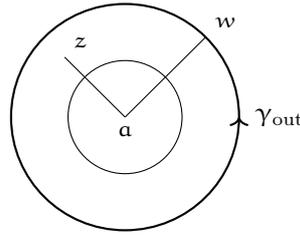
$$\int_{\gamma - \gamma_{\text{out}}} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\gamma - \gamma_{\text{in}}} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw = 0$$

A questo punto, sempre per Cauchy generale,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\text{out}} - \gamma_{\text{in}}} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\text{out}}} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\text{in}}} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Analizziamo separatamente i due integrali:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\text{out}}} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\text{out}}} \frac{f(w)}{(w-a) - (z-a)} dw$$



$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\text{out}}} \frac{f(w)}{1 - \underbrace{\frac{z-a}{w-a}}_{| \cdot | < 1}} \frac{1}{w-a} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\text{out}}} f(w) \sum_{n \geq 0} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} dw$$

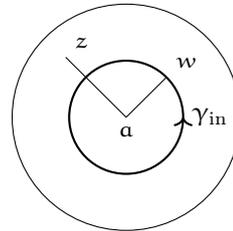
$$= \sum_{n \geq 0} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\text{out}}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw = \sum_{n \geq 0} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

$$= \sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n.$$

per convergenza
uniforme posso
portare la somma
fuori dall'integrale

Procediamo analogamente per le potenze negative:

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\text{in}}} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\text{in}}} \frac{f(w)}{(w-a) - (z-a)} dw$$



$$= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\text{in}}} \frac{f(w)}{1 - \underbrace{\frac{w-a}{z-a}}_{| \cdot | < 1}} \frac{-1}{z-a} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\text{in}}} f(w) \sum_{n \geq 0} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}} dw$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\text{in}}} \frac{f(w)}{(w-a)^{-n}} dw =$$

$$= \sum_{m \leq -1} (z-a)^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{m+1}} dw = \sum_{m \leq -1} a_m (z-a)^m. \quad \square$$

posto
 $m = -(n+1)$

Osservazione. Da questo teorema segue immediatamente che la serie converge sulla più grande corona centrata in a e contenuta in Ω .

Esempio. Scriviamo i termini negativi nello sviluppo di Laurent di

$$f(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{z^4}$$

Sfruttiamo l'espansione di Taylor dell'esponenziale:

$$\frac{e^z - e^{-z}}{z^4} = \frac{1}{z^4} \left[\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right) - \left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right) \right]$$

$$= \frac{1}{z^4} \left[2z + \frac{2}{3!} z^3 + \dots \right] = \frac{2}{z^3} + \frac{1}{3} \frac{1}{z} + \dots$$

Esempio. Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}.$$

Le cui singolarità sono le radici quarte dell'unità. Troviamo il termine (-1) -esimo della serie di Laurent in $e^{i\pi/4}$:

$$f(z) = \frac{z^2}{(z - e^{i\pi/4})(z - e^{i3/4\pi})(z - e^{i5/4\pi})(z - e^{i7/4\pi})} = \frac{1}{z - e^{i\pi/4}} g(z),$$

dove $g(z)$ è olomorfa in un intorno di $e^{i\pi/4}$ ed è pertanto esprimibile attraverso la sua serie di Taylor. Da cui

$$\frac{1}{z - e^{i\pi/4}} g(z) = \frac{1}{z - e^{i\pi/4}} [g_0 + g_1(z - e^{i\pi/4}) + g_2(z - e^{i\pi/4})^2 + \dots],$$

ne segue che il termine (-1) -esimo è

$$\frac{g_0}{z - e^{i\pi/4}} \quad \text{con } g_0 = g^{(0)}(e^{i\pi/4}) = \frac{(e^{i\pi/4})^2}{(e^{i\pi/4} - e^{i3/4\pi})(e^{i\pi/4} - e^{i5/4\pi})(e^{i\pi/4} - e^{i7/4\pi})}.$$

3.3 SINGOLARITÀ ISOLATE

Definizione 3.6 – Singolarità isolata

Sia $f: D(z_0; r) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$. Si dice che f ha una *singolarità isolata* in z_0 se esiste un intorno U di z_0 per cui f è olomorfa in $U \setminus \{z_0\}$.

Definizione 3.7 – Singolarità eliminabile

Si definisce *singolarità eliminabile* di una funzione olomorfa f , una singolarità isolata z_0 di f tale che

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| < +\infty.$$

Teorema 3.8 – della singolarità eliminabile

Sia f una funzione olomorfa e limitata in $D(z_0; r) \setminus \{z_0\}$. Allora esiste $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq z_0 \\ \alpha & z = z_0 \end{cases}$$

è olomorfa in $D(z_0; r)$.

Dimostrazione. Moralmente si ha $\alpha = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, ma dalle ipotesi non sappiamo se tale limite esiste. Consideriamo

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & z \neq z_0 \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$$

g è chiaramente continua poiché per $z \rightarrow z_0$ si ha $(z - z_0)^2 \rightarrow 0$ e $f(z)$ limitata per ipotesi, da cui

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0.$$

Inoltre g è olomorfa in $D(z_0; r)$ poiché in $D(z_0; r) \setminus \{z_0\}$ è prodotto di funzioni olomorfe, mentre in z_0 si ha

$$\frac{g(z_0 + h) - g(z_0)}{h} = \frac{h^2 f(z_0 + h)}{h} \rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow 0 \implies g'(z_0) = 0.$$

In quanto funzione olomorfa, g coincide con la sua serie di Taylor:

$$g(z) = g_2(z - z_0)^2 + g_3(z - z_0)^3 + g_4(z - z_0)^4 + \dots$$

Da cui

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^2} = g_2 + g_3(z - z_0) + g_4(z - z_0)^2 + \dots$$

Se pongo $\alpha = g_2$ avrò che \tilde{f} coincide con una serie di potenze, per cui \tilde{f} è olomorfa. \square

ricordiamo che
 $g(z_0) = g'(z_0) = 0$

Esempio. La funzione

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{\sin z},$$

ha una singolarità eliminabile nell'origine. Infatti

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots},$$

dove $1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots$ è una funzione olomorfa non nulla in 0, pertanto il suo reciproco è ancora olomorfo e può essere espresso tramite la sua serie di Taylor:

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \left(1 + \frac{z^2}{3!} + \dots \right) = \left(\frac{z}{3!} + \dots \right),$$

che è una funzione olomorfa anche nell'origine.

Definizione 3.9 – Polo

Si definisce *polo* di una funzione olomorfa f , una singolarità isolata z_0 di f tale che

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty.$$

Osservazione. Analogamente z_0 è un polo di $f: D(z_0; r) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ se f si può estendere con continuità a

$$f: D(z_0; r) \rightarrow \Sigma.$$

Proposizione 3.10 – Serie di Laurent calcolata in un polo

Sia $f: D(z_0; r) \setminus \{z_0\}$ una funzione olomorfa e supponiamo che z_0 sia un polo di f . Allora

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

cioè l'espressione di f come serie di Laurent in z_0 ha un numero finito di termini negativi.

Dimostrazione. Consideriamo

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

che è olomorfa in $D(z_0; r) \setminus \{z_0\}$ perché $f(z) \neq 0$ in $D(z_0; \epsilon)$. Inoltre $g(z) \rightarrow 0$ per $z \rightarrow z_0$.

Possiamo quindi applicare il teorema della singolarità eliminabile, da cui

$$g(z) = a_m(z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \dots = (z-z_0)^m [a_m + a_{m+1}(z-z_0) + a_{m+2}(z-z_0)^2 + \dots],$$

segue

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \frac{1}{a_m + a_{m+1}(z-z_0) + \dots},$$

dove $a_m + a_{m+1}(z-z_0) + \dots$ è una funzione olomorfa e non nulla in un intorno di z_0 , pertanto il suo reciproco può essere scritto tramite la sua serie di Taylor:

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} [b_0 + b_1(z-z_0) + b_2(z-z_0)^2 + \dots],$$

ovvero

$$f(z) = \frac{b_0}{(z-z_0)^m} + \frac{b_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + b_m + b_{m+1}(z-z_0) + b_{m+2}(z-z_0)^2 + \dots \quad \square$$

Definizione 3.11 – Singolarità essenziale

Si definisce *singolarità essenziale* di una funzione olomorfa f , una singolarità isolata z_0 di f tale che

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| \text{ non esiste.}$$

Osservazione. Se tale limite non esiste, $|f(z)|$ deve essere necessariamente illimitato in un intorno di z_0 , poiché altrimenti il teorema della singolarità eliminabile ci dice che tale limite esiste e che è uguale al modulo.

Esempio (Singolarità essenziale). La funzione

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \dots$$

presenta una singolarità essenziale in $z = 0$. Infatti lo sviluppo di Laurent ha infiniti termini negativi non nulli.

Esempio (Singolarità essenziale all'infinito). La funzione

$$f(z) = \sin z,$$

presenta una singolarità essenziale all'infinito, infatti sappiamo che per valori reali la funzione è limitata, mentre per valori complessi sappiamo (lo abbiamo visto in un esempio precedente) che

$$\sin(it) = \frac{\sinh t}{i} \simeq e^{|t|}, \quad \text{per } t \text{ grande.}$$

Teorema 3.12 – di Casorati-Weierstrass

Sia f una funzione olomorfa e sia $z_0 \in \mathbb{C}$ una singolarità essenziale di f . Allora

$$f(D(z_0; r) \setminus \{z_0\})$$

è densa in \mathbb{C} .

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $f(D(z_0; r) \setminus \{z_0\})$ non sia densa in \mathbb{C} . Quindi esiste $D(a; \varepsilon) \subset \mathbb{C}$ tale che

$$D(a; \varepsilon) \cap f(D(z_0; r) \setminus \{z_0\}) = \emptyset.$$

Definiamo

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - a},$$

che è una funzione olomorfa in $D(z_0; r) \setminus \{z_0\}$ in quanto il denominatore è sempre non nullo. Inoltre g è limitata poiché

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - a|} \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Posso quindi applicare il teorema della singolarità eliminabile, per estendere g ad una funzione olomorfa su $D(z_0; r)$.

Osserviamo che f non è limitata in $D(z_0; r)$, poiché altrimenti vi sarebbe una singolarità eliminabile dove, per ipotesi, ve ne è una essenziale. Per cui

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z) - a} = 0 \implies g(z_0) = 0.$$

il limite esiste perché g è olomorfa

Scriviamo lo sviluppo di Taylor di g in z_0 , con a_n il primo coefficiente non nullo,

$$g(z) = a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots,$$

quindi

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + a$$

ha un polo di ordine n in z_0 , infatti:

$$g(z) = (z - z_0)^n [a_n + a_{n+1}(z - z_0) + \dots] \implies \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^n} [b_0 + b_1(z - z_0) + \dots]$$

D'altronde ciò è assurdo dal momento che, per ipotesi, z_0 è una singolarità essenziale per f . □

Definizione 3.13 – Polo all'infinito

Diciamo che una funzione olomorfa $f: \overline{B(0; R)}^c \rightarrow \mathbb{C}$ ha un *polo all'infinito* se $f(1/z)$ ha un polo nell'origine.

Osservazione. La mappa $z \mapsto 1/z$ è la lineare fratta che scambia 0 e ∞ . Nella sfera di Riemann corrisponde ad una rotazione di π rispetto all'asse reale.

Definizione 3.14 – Singolarità essenziale all'infinito

Diciamo che una funzione olomorfa $f: \overline{B(0; R)}^c \rightarrow \mathbb{C}$ ha una *singolarità essenziale all'infinito* se $f(1/z)$ ha una singolarità essenziale nell'origine.

Esempio. $f(z) = e^z$ ha una singolarità essenziale all'infinito, in quanto $e^{1/z}$ ha una singolarità essenziale nell'origine.

Proposizione 3.15 – Serie di Laurent calcolata in un polo all'infinito

Sia $f: \overline{B(0; R)}^c \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e supponiamo che f abbia un polo all'infinito. Allora $f(z)$ ha finite potenze positive nello sviluppo di Laurent in $\overline{B(0; R)}^c$

Dimostrazione. $f(1/z)$ è definita su $B(0; 1/R) \setminus \{0\}$. Inoltre per ipotesi ha un polo in 0, quindi per la teorema 3.10 ha finite potenze negative nella sua espansione di Laurent:

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a_{-n}}{z^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Posto $w = \frac{1}{z}$ otteniamo

$$f(w) = a_{-n} w^n + \dots + a_{-1} w + a_0 + \frac{a_1}{w} + \frac{a_2}{w^2} + \dots$$

che è la tesi. □

Definizione 3.16 – Funzione meromorfa

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Diciamo che f è una funzione *meromorfa* se è olomorfa su Ω ad esclusione di un insieme di punti costituito da soli poli.

Osservazione. Se f è una funzione meromorfa e ∞ è un suo polo, allora f può essere estesa ad una funzione

$$f: \Sigma \rightarrow \Sigma,$$

dove Σ è la sfera di Riemann.

Esempio. La funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$$

è meromorfa. Infatti le sue uniche singolarità sono le radici quarte di -1 , che costituiscono poli per f .

Proposizione 3.17 – Poli di una funzione meromorfa sono isolati

Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione meromorfa. Allora i poli di f sono isolati.

Dimostrazione. Supponiamo che z_0 sia un polo di f . Scrivendo la serie di Laurent di f in z_0 otteniamo

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

che sappiamo convergere in $D(z_0; r) \setminus \{z_0\}$. Da ciò segue che in $D(z_0; r)$ non vi possono essere ulteriori poli. \square

Osservazione. Se estendiamo f a Σ , dal momento che quest'ultima è un compatto, i poli risultano necessariamente in numero finito. Infatti un insieme di punti isolati in un compatto è sempre finito.

Proposizione 3.18 – Caratterizzazione delle funzioni meromorfe su Σ

Sia $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ una funzione meromorfa. Allora f è una funzione razionale.

Dimostrazione. In quanto meromorfa, f ha un numero finito di poli $\{z_1, \dots, z_n\}$. Scriviamo lo sviluppo di Laurent di f in z_1 :

$$f(z) = \underbrace{\frac{a_{-n}}{(z-z_1)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_1)}}_{R_1(z)} + \underbrace{a_0 + a_1(z-z_1) + a_2(z-z_1)^2 + \dots}_{f_1(z)}$$

dove $f_1(z)$ è una funzione olomorfa in z_1 e $R_1(z)$ è una funzione razionale. Da cui

$$f_1(z) = f(z) - R_1(z)$$

è una funzione meromorfa avente come poli $\{z_2, \dots, z_n\}$. Ripetendo lo stesso procedimento per il polo z_2 di f_1 otteniamo

$$f_2(z) = f_1(z) - R_2(z)$$

che sarà una funzione meromorfa con i poli $\{z_3, \dots, z_n\}$. Iterando troviamo

$$f_n(z) = f(z) - R_1(z) - \dots - R_n(z)$$

che è una funzione meromorfa che non ha poli al finito. D'altronde ∞ è un polo per f e di conseguenza lo è anche per f_n . In particolare, per la teorema 3.15, f ha un numero finito di potenze positive nella sua espansione di Laurent fuori da $B(0; R)$. Da cui

$$|f(z)| \approx |z|^l \implies |f_n(z)| \approx |z|^l$$

poiché $R_j(z) \rightarrow 0$ per $z \rightarrow +\infty$. Quindi $f_n(z)$ è intera e ha crescita polinomiale, per il teorema di Liouville f_n è un polinomio, ovvero

$$f_n(z) = P(z) \iff f(z) = P(z) + R_1(z) + \dots + R_n(z),$$

cioè f è razionale. \square

4 | CALCOLO DEI RESIDUI

4.1 IL TEOREMA DEI RESIDUI

Definizione 4.1 – Residuo

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e sia $z_0 \in \Omega$. Sia $f: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa che in z_0 ha una singolarità isolata e quindi un unico sviluppo in serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n.$$

Si definisce *residuo* di f in z_0 è il coefficiente a_{-1} della sua serie di Laurent.

Notazione. Il residuo di f in z_0 si indica con $\text{Res}(f, z_0)$.

Teorema 4.2 – dei Residui

Sia $f: D(z_0; r) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa la cui serie di Laurent attorno a z_0 è

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n.$$

Sia γ una curva chiusa in $D(z_0; r) \setminus \{z_0\}$. Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \text{Ind}(\gamma, z_0) \text{Res}(f, z_0).$$

Dimostrazione. Tramite la serie di Laurent di f in z_0 scriviamo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n dz.$$

γ è un compatto nella corona di convergenza della serie, per cui su $\text{Im}(\gamma)$ la serie converge uniformemente e pertanto posso scambiare serie e integrale:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n dz = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (z - z_0)^n dz.$$

Analizziamo l'integrale al variare di n :

- Se $n \geq 0$, per Cauchy avremo

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = 0.$$

- Se $n \leq -2$, $(z - z_0)^n$ ammette una primitiva, quindi

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = 0.$$

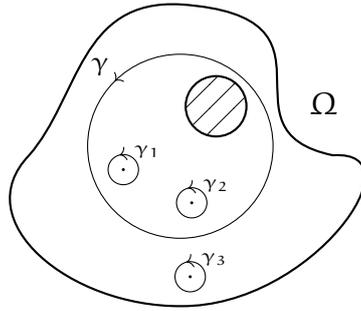


Figura 4.1: Rappresentazione di Ω e delle curve usate nel teorema.

- Se $n = -1$ avremo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \text{Ind}(\gamma, z_0).$$

In conclusione

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = \text{Ind}(\gamma, z_0) a_{-1} = \text{Ind}(\gamma, z_0) \text{Res}(f, z_0). \quad \square$$

Esempio. L'indice di avvolgimento di una curva è il primo esempio di residuo che abbiamo incontrato, infatti per il teorema

$$\text{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz \implies \text{Res}\left(\frac{1}{z - z_0}, z_0\right) = 1.$$

Teorema 4.3 – dei Residui generalizzato

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e sia $f: \Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Sia γ un ciclo in $\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ tale che $\text{Ind}(\gamma, \alpha) = 0$ se $\alpha \notin \Omega$. Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, a_i) \text{Ind}(\gamma, a_i).$$

Dimostrazione. Pongo $\text{Ind}(\gamma, a_i) = l_i$. Trovo $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ cicli tali che

$$\text{Ind}(\gamma_i, a_i) = l_i \quad \text{e} \quad \text{Ind}(\gamma_i, \alpha) = 0, \text{ se } \alpha \notin \Omega.$$

Infatti mi basta porre $\gamma_i = \partial B(a_i, \varepsilon)$ percorso l_i volte, con $B(a_i, \varepsilon) \subseteq \Omega$, da cui

$$\text{Ind}(\gamma_i, \beta) = 0 \text{ se } \beta \notin B(a_i, \varepsilon) \implies \text{Ind}(\gamma_i, \alpha) = 0 \text{ se } \alpha \notin \Omega.$$

Adesso pongo $\Gamma = \gamma - \gamma_1 - \dots - \gamma_n$, così che Γ soddisfa le ipotesi del teorema di Cauchy generalizzato su $\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Infatti

$$\text{Ind}(\Gamma, \alpha) = \text{Ind}(\gamma, \alpha) - \text{Ind}(\gamma_1, \alpha) - \dots - \text{Ind}(\gamma_n, \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \notin \Omega \\ 0 & \text{se } \alpha = a_i \end{cases}$$

Applicando il teorema otteniamo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = 0,$$

da cui, applicando il teorema dei residui

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, a_i) \text{Ind}(\gamma_i, a_i).$$

Quindi, ricordando che $\text{Ind}(\gamma_1, a_i) = \text{Ind}(\gamma, a_i)$, otteniamo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, a_i) \text{Ind}(\gamma, a_i). \quad \square$$

4.2 INDICATORE LOGARITMICO

Dalla definizione di indice di una curva sappiamo che

$$\text{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}.$$

Intuitivamente la ragione risiede nel fatto che la primitiva di $1/(z-a)$ è $\ln(z-a)$, il quale "scarta" di $2\pi i$ per ogni giro attorno ad a .

Osserviamo che

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} \ln f(z),$$

per cui saremmo tentati di affermare che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

conti i giri di $f \circ \gamma$ attorno all'origine.

Studiamo un caso particolare. Supponiamo che

$$f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots \quad \text{e} \quad \gamma(t) = r e^{it}.$$

Avremo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{n a_n z^{n-1} + \dots}{a_n z^n + \dots} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{n a_n z^{n-1}}{a_n z^n} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{n}{z} dz = n. \end{aligned}$$

Dove abbiamo escluso i termini di ordine superiore in quanto costituivano una funzione olomorfa, il cui contributo all'integrale sarebbe stato nullo per il Teorema di Cauchy.

Sembrerebbe quindi che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

conti gli zeri di f con la loro molteplicità.

Teorema 4.4 – dell'indicatore logaritmico

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso e sia f una funzione meromorfa in Ω avente finiti zeri $\{a_j\}_{j=1}^m$ di molteplicità r_j e poli $\{b_k\}_{k=1}^l$ di ordine s_k . Sia γ un ciclo in Ω tale che $\text{Ind}(\gamma, \alpha) = 0$ se $\alpha \notin \Omega$. Supponiamo che $\text{Im}(\gamma)$ non contenga zeri e poli di f . Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^m r_j \text{Ind}(\gamma, a_j) - \sum_{k=1}^l s_k \text{Ind}(\gamma, b_k).$$

Dimostrazione. Siano $\{c_t\}$ i poli di $\frac{f'}{f}$, i quali corrispondono chiaramente a $\{a_j\} \cup \{b_k\}$. Per il teorema dei residui generalizzato, avremo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_t \operatorname{Res} \left(\frac{f'}{f}, c_t \right) \operatorname{Ind}(\gamma, c_t).$$

Andiamo quindi a calcolare i residui. Sia a_j uno zero di f di molteplicità r_j . In un intorno di a_j avremo

$$f(z) = m_{r_j}(z - a_j)^{r_j} + m_{r_j+1}(z - a_j)^{r_j+1} + \dots,$$

dove $r_j > 0$ in quanto a_j è uno zero di f . Quindi

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_{r_j}(z - a_j)^{r_j-1} r_j + \dots}{m_{r_j}(z - a_j)^{r_j} + \dots} = \frac{r_j}{z - a_j} + [g_0 + g_1(z - a_j) + g_2(z - a_j)^2 + \dots],$$

da cui

$$\operatorname{Res} \left(\frac{f'}{f}, a_j \right) = r_j.$$

Sia b_k un polo di f di ordine s_k . In un intorno di b_k avremo

$$f(z) = \frac{m_{s_k}}{(z - b_k)^{s_k}} + \frac{m_{s_k-1}}{(z - b_k)^{s_k-1}} + \dots$$

Quindi

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\frac{-s_k m_{s_k}}{(z - b_k)^{s_k+1}} + \dots}{\frac{m_{s_k}}{(z - b_k)^{s_k}} + \dots} = \frac{-s_k m_{s_k}}{m_{s_k} + \dots} + \dots = \frac{-s_k}{z - b_k} + [h_0 + h_1(z - b_k) + h_2(z - b_k)^2 + \dots],$$

moltiplicando per $(z - b_k)^{s_k}$

da cui

$$\operatorname{Res} \left(\frac{f'}{f}, b_k \right) = -s_k.$$

Sostituendo nell'espressione con i residui si giunge alla tesi. \square

Osservazione. Supponiamo che f non abbia poli e abbia uno zero di ordine n in a :

$$f(z) = a_n(z - a)^n + a_{n+1}(z - a)^{n+1} + \dots$$

Se γ è una curva che fa un giro attorno ad a , per il teorema $f(\gamma)$ compie n giri attorno a 0 . Questo è un fatto topologico. Ciò significa che se prendo g sufficientemente vicina ad f , tale proprietà si conserva. Vedremo che tale funzione deve essere vicina nella misura in cui $0 \notin g(\gamma)$.

Teorema 4.5 – di Rouchè

Siano f, g olomorfe in $B(z_0; r)$ e continue fino al bordo. Supponiamo che f, g non abbiano zeri sul cerchio $\partial B(z_0; r)$ e che

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \text{se } z \in \partial B(z_0; r).$$

Allora f, g hanno lo stesso numero di zeri in $B(z_0; r)$.

Dimostrazione. Consideriamo l'omotopia $h_\lambda(z)$ fra f e g definita da

$$h_\lambda(z) = \lambda f(z) + (1 - \lambda)g(z), \quad \text{con } \lambda \in [0, 1].$$

Definiamo

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0; r)} \frac{h'_\lambda(z)}{h_\lambda(z)} dz$$

l'indicatore logaritmico di h_λ . In particolare, dal momento che $h_0 \equiv g$, $h_1 \equiv f$ e f, g sono funzioni olomorfe, avremo

$$\alpha(0) = \#\{\text{zeri di } g\} \quad \text{e} \quad \alpha(1) = \#\{\text{zeri di } f\}.$$

Osserviamo che $\alpha(\lambda)$ dipende con continuità da λ , questo poiché vale la continuità sotto segno di integrale. Infatti, per z fissato,

$$\lambda \mapsto \frac{h'_\lambda(z)}{h_\lambda(z)},$$

è continua su $\partial B(z_0; r)$ in quanto

$$(1 - \lambda) \in [0, 1]$$

$$|h_\lambda(z)| = |f(z) + (1 - \lambda)[g(z) - f(z)]| \geq |f(z)| - (1 - \lambda)|g(z) - f(z)| > 0$$

dove $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ per ipotesi. Inoltre $\alpha(\lambda) \in \mathbb{N}$, quindi $\alpha(\lambda)$ è necessariamente costante per via della continuità. Da cui

$$\#\{\text{zeri di } f\} = \alpha(0) = \alpha(1) = \#\{\text{zeri di } g\}. \quad \square$$

Corollario. Teorema fondamentale dell'algebra.

Dimostrazione. Sia $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ un generico polinomio a coefficienti in \mathbb{C} . Consideriamo $g(z) = z^n$. Chiaramente g ha n zeri in ogni palla $B(0; R)$. A questo punto è sufficiente mostrare che vale Rouchè. In particolare ci basta mostrare che se R è sufficientemente grande

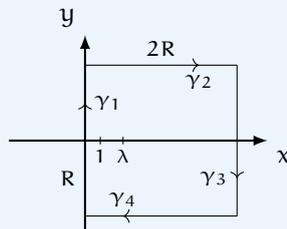
$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \text{per } z \in \partial B(0; R).$$

D'altronde se $|z| = R$ con R sufficientemente grande,

$$|f(z) - g(z)| = |a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0| < |z^n|. \quad \square$$

Esempio. Sia $\lambda > 1$ reale. Dimostriamo che l'equazione $\lambda - z - e^{-z} = 0$ ha esattamente una soluzione nel semipiano $\{z \mid \Re z > 0\}$.

Prendiamo $f(z) = \lambda - z - e^{-z}$ e $g(z) = \lambda - z$. Chiaramente g ha un solo zero su qualsiasi palla $B(\lambda; R)$. Vorremmo poter applicare Rouchè sul seguente cammino:



Per farlo dobbiamo mostrare che, per R sufficientemente grande, vale

$$|f(z) - g(z)| \leq |f(z)| \quad \text{per } z \in \partial Q_R,$$

dove $\partial Q_R = \text{Im}(\gamma_1) \cup \text{Im}(\gamma_2) \cup \text{Im}(\gamma_3) \cup \text{Im}(\gamma_4)$. Dalla figura si deduce che se $z \in \partial Q_R$ e $R > 1 + \lambda$, allora $|g(z)| > 1$. Inoltre

$$|f(z) - g(z)| = |e^{-z}| = |e^{-x}e^{-iy}| = e^{-x} \leq 1,$$

poiché $x \geq 0$. Per cui vale Rouchè, che implica immediatamente la tesi.

Esercizio 4.1 (Esercitazione 22/11). Si contino gli zeri di $f(z) = z^4 - 8z^3 + z^2 + z$ in $B(0; 1)$.

Soluzione. Definiamo $g(z) = -8z^3$ che in $B(0; 1)$ ha precisamente 3 zeri. Verifichiamo le ipotesi di Rouché:

$$|f(z) - g(z)| = |z^4 + z^2 + z| \leq |z|^4 + |z|^2 + |z| \leq 3 < |g(z)| = 8.$$

Quindi f e g hanno lo stesso numero di zeri in $B(0; 1)$, cioè 3.

Esercizio 4.2 (Esercitazione 22/11). Sia $f(z) = 4z^4 - 29z^2 + 24$. Determinare $r \in \mathbb{N}$ tale che f ammette tutti i suoi zeri in $B(0; r)$.

Soluzione. Per il teorema fondamentale dell'algebra f ha 4 zeri in \mathbb{C} . Pertanto se vogliamo applicare il teorema di Rouché, dobbiamo trovare r per cui f soddisfi le ipotesi con $g(z) = 4z^4$. Poniamo $r = 3$, avremo

$$|f(z) - g(z)| = |-29z^2 + 24| \leq 29|z|^2 + 24 \leq 285 < |g(z)| = 324.$$

Quindi f ha tutti e 4 gli zeri in $B(0; 3)$.

Proposizione 4.6 – Successione di funzioni iniettive è iniettiva o costante

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso. Siano f_n funzioni olomorfe e iniettive su Ω tali che $f_n \rightarrow f$ quasi uniformemente. Allora f è olomorfa ed è iniettiva oppure costante.

Dimostrazione. L'olomorfia viene da un vecchio teorema. Se f è costante non c'è altro da dimostrare. Supponiamo quindi che f non sia costante. Supponiamo per assurdo che f non sia iniettiva, quindi esiste $w_0 \in \mathbb{C}$ che ha più di una retroimmagine tramite f . Tali retroimmagini sono necessariamente isolate, poiché altrimenti $f(z) \equiv w_0$ per il principio di identità.

Prendiamo $z_0, z_1 \in \Omega$ tali che $f(z_0) = f(z_1) = w_0$. Siccome le retroimmagini sono isolate, posso trovare r sufficientemente piccolo tale che

$$B(z_0; r) \cap f^{-1}(w_0) = z_0 \quad \text{e} \quad B(z_1; r) \cap f^{-1}(w_0) = z_1.$$

Notiamo che, se $z \in \partial B(z_0; r) \cup \partial B(z_1; r)$, si ha

$$|(f_n(z) - w_0) - (f(z) - w_0)| < |f(z) - w_0|.$$

Infatti

$$|(f_n(z) - w_0) - (f(z) - w_0)| \rightarrow 0$$

per la convergenza quasi uniforme degli f_n . D'altronde

$$|f(z) - w_0| \geq \varepsilon > 0, \quad \forall z \in \partial B(z_0; r) \cup \partial B(z_1; r).$$

Posso quindi applicare Rouché per ottenere che $f(z) - w_0$ ha tanti zeri quanti $f_n(z) - w_0$. D'altronde $f_n(z) - w_0$ ne ha al più uno per l'iniettività di f_n , mentre $f(z) - w_0$ ne ha due per ipotesi. Ciò è assurdo, per cui f è iniettiva. \square

Notazione. Nell'ambito dell'analisi complessa, le funzioni iniettive vengono anche dette *univalenti*.

Teorema 4.7 – Funzioni olomorfe sono aperte

Sia f una funzione olomorfa. Allora f è aperta.

Dimostrazione. Affinché f sia aperta, dobbiamo dimostrare che l'immagine di aperti è ancora un aperto. Sia quindi $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Per dimostrare che $f(\Omega)$ è aperto mostriamo che ogni suo punto è interno, cioè che se $w_0 \in f(\Omega)$ e $|w - w_0|$ è sufficientemente piccolo, allora anche $w \in f(\Omega)$.

Dal momento che $w_0 \in f(\Omega)$, ho che $f^{-1}(w_0) \neq \emptyset$. Possiamo supporre che f non sia costante, quindi i punti di $f^{-1}(w_0)$ sono isolati, poiché altrimenti $f(z) \equiv w_0$ per il principio di identità. Quindi, se $z_0 \in f^{-1}(w_0)$ e prendo r sufficientemente piccolo, avremo

$$f(z) \neq w_0, \forall z \in \overline{B(z_0; r)} \setminus \{z_0\}.$$

Voglio verificare se vale Rouché fra $f(z) - w$ e $f(z) - w_0$, ovvero se

$$|(f(z) - w) - (f(z) - w_0)| < |f(z) - w_0| \quad \text{per } z \in \partial B(z_0; r).$$

D'altronde

$$|f(z) - w_0| \geq \varepsilon > 0 \quad \text{se } z \in \partial B(z_0; r),$$

inoltre

$$|(f(z) - w) - (f(z) - w_0)| = |w - w_0|.$$

quindi è sufficiente prendere w tale che $|w - w_0| < \varepsilon$ affinché $f(z) - w$ abbia uno zero come $f(z) - w_0$. Da ciò segue che w ha una retroimmagine in Ω . \square

se f è costante la
tesi è banale

4.3 APPENDICE

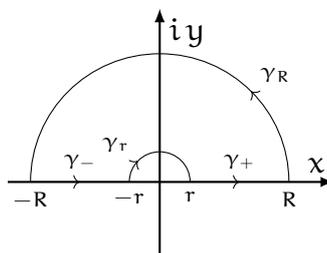
In questo paragrafo studieremo qualche applicazione di quanto studiato fino ad ora.

Proposizione 4.8 – Integrale di Fresnel

Il seguente integrale, detto di Fresnel, vale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Dimostrazione. Consideriamo il cammino rappresentato in figura.



Osserviamo che se considerassimo il seno come funzione da integrare lungo la curva, esso non tenderebbe a zero lungo γ_R . Infatti

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

da cui, se $z = x + iy$,

$$e^{iz} = e^{ix} e^{-y} \simeq e^{-y} \rightarrow 0 \quad \text{ma} \quad e^{-iz} = e^{-ix} e^y \not\rightarrow 0.$$

Quindi non integreremo il seno, bensì la funzione

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z},$$

la quale è olomorfa nella curva $\Gamma = \gamma_- + \gamma_r + \gamma_+ + \gamma_R$, da cui

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Integrando f lungo $\gamma_- + \gamma_+$ avremo

$$\int_{\gamma_- + \gamma_+} \frac{e^{ix}}{x} dx \xrightarrow[\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}]{2i} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

in quanto la parte reale si annulla, poiché $\cos x/x$ è dispari.

Integriamo f sulle curve restanti. Definiamo

$$\gamma_R: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto R e^{it} \quad \text{e} \quad -\gamma_r: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto r e^{it}.$$

Da cui

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{iR(\cos t + i \sin t)}}{R e^{it}} i R e^{it} dt = \int_0^{\pi} i e^{iR \cos t} e^{-R \sin t} dt$$

che stimato in modulo

$$\left| \int_0^{\pi} i e^{iR \cos t} e^{-R \sin t} dt \right| \leq \int_0^{\pi} e^{-R \sin t} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Infine

$$\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_r} g(z) dz = -\pi i + \int_{\gamma_r} g(z) dz.$$

applicando Taylor

Mostriamo che il secondo integrale tende a zero:

$$-\int_{-\gamma_r} g(z) dz = -\int_0^{\pi} g(r e^{it}) i r e^{it} dt,$$

che, stimato in modulo, vale

$$\left| \int_0^{\pi} g(r e^{it}) i r e^{it} dt \right| \leq \int_0^{\pi} |g(r e^{it})| r dt \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Quindi

$$2i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi i \implies \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

□

Proposizione 4.9 – Prodotto di Eulero per il seno

Vale la seguente identità

$$\sin z = z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2} \right).$$

$g(z)$ è ben definita in quanto converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

Dimostrazione. Definiamo

$$f(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} \quad \text{e} \quad g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Per prima cosa dimostriamo che $f(z) = g(z)$. Osserviamo che entrambe sono funzioni periodiche di periodo 1, ovvero

$$f(z+1) = f(z) \quad \text{e} \quad g(z+1) = g(z).$$

Per cui possiamo restringerci a studiarle all'interno della striscia $S = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Re z \leq 1\}$. Mostriamo che in tale striscia, e quindi su tutto \mathbb{C} , $f - g$ è limitata. Sui compatti si ha la limitatezza per Weierstrass, dobbiamo quindi studiare il comportamento all'infinito e nei poli 0 e 1. Per $f(z)$:

$$\lim_{\substack{z \in S \\ \Im z \rightarrow +\infty}} f(z) \stackrel{z=x+iy}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{\left| \frac{e^{ix\pi} e^{-y\pi} - e^{-ix\pi} e^{y\pi}}{2i} \right|^2} = 0$$

e il limite è uniforme in $x \in [0, 1]$. Per $g(z)$:

$$\lim_{\substack{z \in S \\ \Im z \rightarrow +\infty}} \left| \sum \frac{1}{(z-n)^2} \right| \leq \lim_{\substack{z \in S \\ \Im z \rightarrow +\infty}} \sum \frac{1}{|z-n|^2} \leq \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y^2 + n^2} = 0.$$

Ora

$$f(z) - g(z) = \frac{1}{z^2} + \tilde{f}(z) - \left[\frac{1}{z^2} + \tilde{g}(z) \right] = \tilde{f}(z) - \tilde{g}(z),$$

che è limitata. Quindi la singolarità in 0 è eliminabile. Analogamente vale per la singolarità in 1 per via della periodicità.

Applicando il teorema di Liouville a $f - g$ otteniamo $f(z) = g(z) + c$. D'altronde abbiamo già osservato

$$\lim_{\substack{z \in S \\ \Im z \rightarrow +\infty}} f(z) - g(z) = 0 \implies c = 0,$$

per cui $f(z) = g(z)$. Integrando termine a termine otteniamo

$$\pi \cot(\pi z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int \frac{1}{(z-n)^2} dz + C = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{z} + C,$$

dove abbiamo scelto $1/n$ come costante additiva per integrazione di g . Raccogliendo i termini con $\pm n$ si ottiene

$$\pi \cot(\pi z) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) + \frac{1}{z} + C = \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2} + \frac{1}{z} + C,$$

dove $C = 0$ in quanto entrambi i termini sono dispari. Integriamo nuovamente:

$$\ln(\sin(\pi z)) = \ln z + \sum_{n \geq 1} [\ln(z-n) + \ln(z+n) - \ln(-n) - \ln(n)] + C,$$

dove, di nuovo, i termini $-\ln(-n) - \ln(n)$ sono la costante additiva. Quindi

$$\ln(\sin(\pi z)) = \ln z + \sum_{n \geq 1} \left[\ln \left(1 - \frac{z}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{z}{n} \right) \right] + C = \ln z + \sum_{n \geq 1} \ln \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right) + C.$$

Esponenziando

$$\sin(\pi z) = e^C z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right).$$

\tilde{f} e \tilde{g} sono olomorfe in 0

Nell'origine

$$\sin(\pi z) \simeq \pi z \quad \text{e} \quad \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \simeq 1,$$

per cui $\pi z = e^C z \implies e^C = \pi$. Quindi

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Sostituendo $w = \pi z$ si giunge alla tesi. □

4.4 FORMULA DI INVERSIONE DI LAGRANGE

Supponiamo di avere una mappa f olomorfa e iniettiva. In questo paragrafo cercheremo di trovare la rappresentazione in serie di Taylor di f^{-1} .

Se $f'(z_0) \neq 0$, come mappa da \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 , la derivata è una rotodilatazione. Per il teorema della funzione inversa, f^{-1} è definita in un intorno di $f(z_0) = w_0$ ed è olomorfa. Infatti la sua derivata è l'inversa di una rotodilatazione ed è, pertanto, anch'essa una rotodilatazione.

D'altronde se f è iniettiva si ha sempre $f'(z_0) \neq 0$. Altrimenti, posto $f(z_0) = w_0$, si avrebbe che $f(z) - w_0$ ha almeno due zeri, infatti

$$f(z) - w_0 = f(z) - f(z_0) = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

ma $a_1 = f'(z_0) = 0$, da cui

$$f(z) - w_0 = a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Quindi, per Rouchè, ogni w vicino a w_0 ha più di una retroimmagine, ma ciò sarebbe assurdo poiché f è iniettiva.

In conclusione, se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è iniettiva, $f(\Omega)$ è aperto e la mappa

$$f^{-1}: f(\Omega) \longrightarrow \Omega$$

è olomorfa.

Proprietà 4.10. Supponiamo che z_0 sia uno zero semplice di f , allora

$$\operatorname{Res} \left(z \frac{f'(z)}{f(z)}, z_0 \right) = z_0 \operatorname{Res} \left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_0 \right)$$

| *Dimostrazione.* Conto diretto. □

Osservazione. La proprietà vale anche se z_0 è un polo di primo ordine.

Osservazione. È possibile dimostrare che la tesi resta valida se viene tolta l'ipotesi di zeri e poli semplici.

Proprietà 4.11. Sia f una funzione meromorfa che soddisfa le ipotesi dell'indicatore logaritmico. Supponiamo inoltre che i poli e gli zeri di f siano semplici, allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_j a_j \operatorname{Ind}(\gamma, a_j) - \sum_k b_k \operatorname{Ind}(\gamma, b_k).$$

Dimostrazione. Segue dalla dimostrazione dell'indicatore logaritmico e dalla proprietà precedente. \square

Osservazione. Il risultato, una volta estesa la proprietà precedente a zeri e poli qualsiasi, diventa

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_j a_j r_j \text{Ind}(\gamma, a_j) - \sum_k b_k s_k \text{Ind}(\gamma, b_k),$$

dove r_j, s_k sono le molteplicità degli zeri a_j e dei poli b_k .

Corollario. Se f ha un solo zero α all'interno di γ e se $\text{Ind}(\gamma, \alpha) = 1$, allora

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Teorema 4.12 – Formula di inversione di Lagrange

Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una mappa olomorfa e iniettiva e sia $w_0 = f(z_0)$. Se γ è un ciclo in Ω tale che $\text{Ind}(\gamma, z_0) = 1$ e $\text{Ind}(\gamma, \alpha) = 0$ se $\alpha \notin \Omega$, allora

$$f^{-1}(w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz.$$

Dimostrazione. Definiamo $g(z) = f(z) - w_0$. Dal momento che f è iniettiva, g ha un solo zero all'interno di γ , che corrisponde proprio a z_0 . Applicando la formula precedente a g otteniamo

$$z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz.$$

Ovvero

$$f^{-1}(w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz. \quad \square$$

Osservazione. Come conseguenza immediata si ha f^{-1} olomorfa per la differenziazione sotto segno di integrale.

5 | CALCOLO DI INTEGRALI DEFINITI

5.1 ESEMPI SUL TEOREMA DEI RESIDUI

In questi esempi calcoleremo alcuni integrali di Riemann, che normalmente risulterebbero complicati, tramite l'applicazione del teorema dei residui generalizzato.

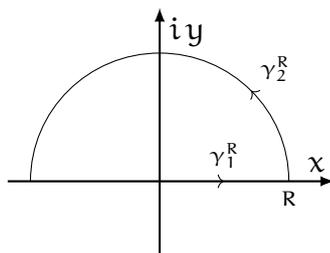
Per prima cosa analizziamo un caso standard, in cui l'integrando consiste in un polinomio razionale.

Proposizione 5.1 – Integrale su \mathbb{R} di un polinomio razionale

Siano $P(x), Q(x)$ polinomi a coefficienti reali. Supponiamo che $Q(x)$ non abbia zeri reali e che $\deg Q \geq \deg P + 2$, allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_i \left\{ \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_i \right) \mid z_i \text{ polo del semipiano superiore} \right\}.$$

Dimostrazione. Le ipotesi su $Q(x)$ e $P(x)$ sono necessarie affinché l'integrale converga secondo Riemann.



I poli della funzione $f(z) = P(z)/Q(z)$ sono gli zeri complessi del polinomio $Q(x)$. Consideriamo il seguente ciclo, come mostrato in figura:

$$\gamma_1^R: [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto t \quad \text{e} \quad \gamma_2^R: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto R e^{it}.$$

Osserviamo che per R sufficientemente grande il ciclo contiene tutti e soli i poli di f che si trovano nel semipiano superiore. Inoltre se z_i è un polo di f nel semipiano superiore avremo, per costruzione

$$\text{Ind}(\gamma_1^R + \gamma_2^R, z_i) = 1.$$

Quindi applicando il teorema dei residui generalizzato avremo

$$\int_{\gamma_1^R + \gamma_2^R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_i \text{Res}(f, z_i).$$

Andiamo quindi a calcolare l'integrale:

$$\int_{\gamma_1^R + \gamma_2^R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{\gamma_1^R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz + \int_{\gamma_2^R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{-R}^R \frac{P(t)}{Q(t)} dt + \int_0^\pi \frac{P(R e^{it})}{Q(R e^{it})} i R e^{it} dt.$$

Dove

$$\int_{-R}^R \frac{P(t)}{Q(t)} dt \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} dt$$

che è proprio l'integrale di partenza. Mentre se per il secondo ne consideriamo il modulo, avremo

ricordiamo che
deg $Q \geq \deg P + 2$
quindi per R
grande posso
stimare il modulo
come C/R^2

$$\left| \int_0^\pi \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} i R e^{it} dt \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} \right| R dt \leq \int_0^\pi \frac{C}{R^2} R dt \\ = \frac{C}{R} \pi \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

Per cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_i \text{Res}(f, z_i). \quad \square$$

Esercizio 5.1. Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^4} dx.$$

Soluzione. Osserviamo che il denominatore non ha radici reali e che la differenza dei gradi è 2. Possiamo quindi applicare la proposizione precedente:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^4} dx = 2\pi i \sum_i \text{Res} \left(\frac{z^2}{1+z^4}, z_i \right), \text{ dove } z_i \text{ è un polo del semipiano superiore.}$$

Calcoliamo quindi i poli della funzione. Osserviamo che gli unici poli sono gli zeri complessi del denominatore:

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = e^{i\frac{3}{4}\pi}, \quad z_3 = e^{i\frac{5}{4}\pi}, \quad z_4 = e^{i\frac{7}{4}\pi}.$$

Noi siamo interessati solo ai poli del semipiano superiore, quindi nel nostro caso a z_1 e z_2 :

$$f(z) = \frac{z^2}{(z - e^{i\frac{\pi}{4}})(z - e^{i\frac{3}{4}\pi})(z - e^{i\frac{5}{4}\pi})(z - e^{i\frac{7}{4}\pi})} = \frac{1}{z - e^{i\frac{\pi}{4}}} g(z),$$

dove $g(z)$ è una funzione olomorfa in $D(e^{i\frac{\pi}{4}}, \varepsilon)$, da cui

$$f(z) = \frac{1}{z - e^{i\frac{\pi}{4}}} [g_0 + g_1(z - e^{i\frac{\pi}{4}}) + g_2(z - e^{i\frac{\pi}{4}})^2 + \dots]$$

Quindi

$$\text{Res}(f(z), e^{i\frac{\pi}{4}}) = g_0 = g(e^{i\frac{\pi}{4}}) = \frac{(e^{i\frac{\pi}{4}})^2}{(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{3}{4}\pi})(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{5}{4}\pi})(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{7}{4}\pi})} \\ = \frac{(e^{i\frac{\pi}{4}})^2}{(e^{i\frac{\pi}{4}})^3 (1-i)(1+i)(1+i)} = \frac{1}{4e^{i\frac{\pi}{4}}}.$$

Analogamente si trova

$$\text{Res}(f(z), e^{i\frac{3}{4}\pi}) = \frac{1}{4e^{i\frac{3}{4}\pi}}.$$

Da cui

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^4} dx = 2\pi i \left(\frac{1}{4e^{i\frac{\pi}{4}}} + \frac{1}{4e^{i\frac{3}{4}\pi}} \right) = \frac{\pi i}{2} (e^{-i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{3}{4}\pi}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Esercizio 5.2. Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx, \quad a > 0.$$

Soluzione. Osserviamo che anche in questo caso il denominatore non ha zeri reali e la differenza dei gradi dei polinomi è 2. Sebbene la proposizione non sia direttamente applicabile, possiamo procedere con una strategia analoga. Osserviamo che

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx = \Re \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{iax}}{1+x^2} dx,$$

mostreremo che

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx = 2\pi i \sum_i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iaz}}{1+z^2}, z_i \right), \text{ dove } z_i \text{ sono i poli superiori della funzione.}$$

Utilizziamo lo stesso cammino $\gamma_1^R + \gamma_2^R$ della proposizione e applichiamo il teorema dei residui:

$$\int_{\gamma_1^R + \gamma_2^R} \frac{e^{iaz}}{1+z^2} dz = 2\pi i \sum_i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iaz}}{1+z^2}, z_i \right),$$

dove

$$\int_{\gamma_1^R + \gamma_2^R} \frac{e^{iaz}}{1+z^2} dz = \int_{\gamma_1^R} \frac{e^{iaz}}{1+z^2} dz + \int_{\gamma_2^R} \frac{e^{iaz}}{1+z^2} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{iat}}{1+t^2} dt + \int_0^\pi \frac{e^{iaR(\cos t + i \sin t)}}{1+R^2 e^{2it}} i R e^{it} dt$$

Passando al limite per $R \rightarrow +\infty$, avremo

$$\int_{-R}^R \frac{e^{iat}}{1+t^2} dt \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iat}}{1+t^2} dt$$

che è l'integrale che vogliamo calcolare, mentre

$$\int_0^\pi \frac{e^{iaR(\cos t + i \sin t)}}{1+R^2 e^{2it}} i R e^{it} dt \rightarrow 0,$$

poiché

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi \frac{e^{iaR(\cos t + i \sin t)}}{1+R^2 e^{2it}} i R e^{it} dt \right| &\leq \int_0^\pi \frac{|e^{iaR \cos t} e^{-aR \sin t}|}{R^2 - 1} R dt = \int_0^\pi \frac{e^{-aR \sin t}}{R^2 - 1} R dt \\ &\leq \int_0^\pi \frac{1}{R^2 - 1} R dt = \frac{R}{R^2 - 1} \pi \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Restano da calcolare i residui. D'altronde questi sono in corrispondenza delle radici complesse di $z^2 + 1$, che sono $\pm i$. Poiché a noi interessano solo i poli del semipiano superiore andiamo a calcolare il residuo in i :

$$\frac{e^{iaz}}{z^2 + 1} = \frac{e^{iaz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{z-i} \frac{e^{iaz}}{z+i} = \frac{1}{z-i} g(z),$$

dove $g(z)$ è una funzione olomorfa in $D(i, \varepsilon)$, per cui

$$\frac{e^{iaz}}{z^2 + 1} = \frac{1}{z-i} [g_0 + g_1(z-i) + g_2(z-i)^2 + \dots].$$

Quindi

$$\operatorname{Res} \left(\frac{e^{iaz}}{z^2 + 1}, i \right) = g_0 = g(i) = \frac{e^{-a}}{2i}.$$

Infine

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx = \Re \left(2\pi i \frac{e^{-a}}{2i} \right) = \pi e^{-a}.$$

Osserviamo che l'uso della parte reale non è stato veramente necessario, questo poiché in

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{iax}}{1+x^2} dx,$$

l'integrale della parte immaginaria si annullava per via della disparità del seno.

Esercizio 5.3. Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n},$$

al variare di $n \in \mathbb{N}$.

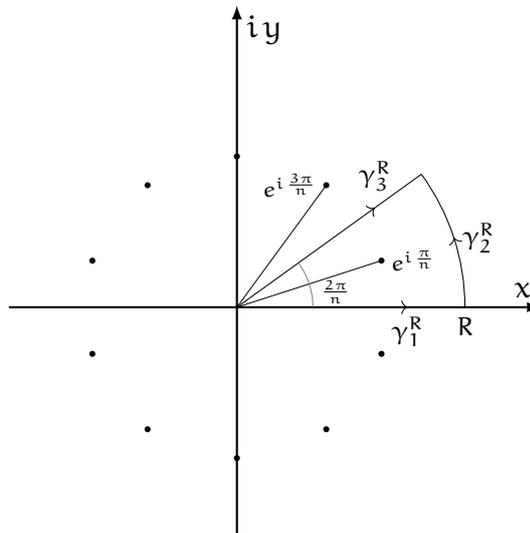
Soluzione. Quando n è pari possiamo scrivere

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$$

che possiamo risolvere con i metodi precedenti.

Analizziamo quindi i casi con n dispari. I poli della funzione sono gli zeri del denominatore, che corrispondono alle radici n -esime dell'unità.

Per applicare il teorema dei residui, scegliamo il seguente cammino, che contiene solo il primo polo:



dove

$$\gamma_1^R: [0, R] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto t; \quad \gamma_2^R: [0, \frac{2\pi}{n}] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto R e^{it}; \quad \gamma_3^R: [0, R] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto t e^{i \frac{2\pi}{n}}.$$

Per il teorema dei residui avremo

$$2\pi i \operatorname{Res}(f, e^{i \frac{\pi}{n}}) = \int_{\gamma_1^R + \gamma_2^R - \gamma_3^R} f(z) dz,$$

dove

$$\int_{\gamma_1^R + \gamma_2^R - \gamma_3^R} f(z) dz = \int_{\gamma_1^R} f(z) dz + \int_{\gamma_2^R} f(z) dz - \int_{\gamma_3^R} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} (1 - e^{i \frac{2\pi}{n}}) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n}.$$

Infatti

$$\int_{\gamma_1^R} f(z) dz = \int_0^R \frac{dt}{1+t^n} \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n}$$

e

$$\int_{\gamma_3^R} f(z) dz = \int_0^R \frac{e^{i \frac{2\pi}{n}}}{1+t^n e^{i 2\pi}} dt = e^{i \frac{2\pi}{n}} \int_0^R \frac{1}{1+t^n} dt.$$

Resta da mostrare che l'integrale di γ_2^R tende a zero, per farlo studiamone il modulo:

$$\left| \int_{\gamma_2^R} f(z) dz \right| = \left| \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{i R e^{it}}{1 + R^n e^{ni t}} dt \right| \leq \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{R}{R^n - 1} dt = \frac{2\pi}{n} \frac{R}{R^n - 1} \rightarrow 0.$$

Calcoliamo il residuo. Per farlo utilizzeremo un metodo differente da quello visto in precedente, che sfrutta la regola di de l'Hôpital

$$f(z) = \frac{g_0}{z - e^{i\frac{\pi}{n}}} + g_1 + g_2(z - e^{i\frac{\pi}{n}}) + \dots$$

da cui

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, e^{i\frac{\pi}{n}}) &= g_0 = \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{\pi}{n}}} (z - e^{i\frac{\pi}{n}}) f(z) = \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{\pi}{n}}} \frac{z - e^{i\frac{\pi}{n}}}{1 + z^n} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{\pi}{n}}} \frac{1}{n z^{n-1}} = \frac{1}{n e^{i\pi \frac{n-1}{n}}}. \end{aligned}$$

5.2 ESEMPI CON DETERMINAZIONE

Quando si considerano funzioni del tipo z^α con $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}.$$

Quindi, per definizione, z^α non è univocamente determinato, ma dipende dalla scelta della *determinazione* di $\ln z$.

Nei prossimi esempi vedremo come ovviare a questo problema, quando questo genere di funzioni si presenta negli integrali.

Esercizio 5.4. Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

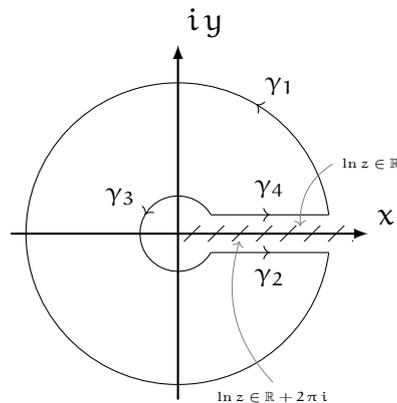
supponendo che $\alpha \in (0, 1)$, Q non abbia zeri reali e $\deg Q \geq \deg P + 2$.

Soluzione. Osserviamo che

$$z^\alpha \frac{P(z)}{Q(z)} = e^{\alpha \ln z} \frac{P(z)}{Q(z)} = e^{\alpha \ln z} R(z).$$

Definiamo $\ln z$ in \mathbb{C} meno l'asse reale positivo. Scegliamo inoltre la determinazione in cui $\ln z \in \mathbb{R}$ se tende all'asse reale positivo da valori nel semipiano superiore e $\ln z \in \mathbb{R} + 2\pi i$ se vi tende dal semipiano inferiore.

Per applicare il teorema dei residui scegliamo il cammino rappresentato in figura, detto anche buco della serratura



dove

$$\gamma_1: [\vartheta, 2\pi - \vartheta] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto R e^{it}; \quad \gamma_2: [\varepsilon, R] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto t - i\delta;$$

e

$$\gamma_3: [\lambda, 2\pi - \lambda] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto r e^{it}; \quad \gamma_4: [\varepsilon, R] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto t + i\delta.$$

Per il teorema dei residui avremo

$$2\pi i \sum_i \operatorname{Res}(f, z_i) = \int_{\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4} f(z) dz.$$

In particolare

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4} f(z) dz &= \int_{\vartheta}^{2\pi - \vartheta} \frac{(Re^{it})^\alpha P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} i Re^{it} dt - \int_{\varepsilon}^R \frac{(t - i\delta)^\alpha P(t - i\delta)}{Q(t - i\delta)} dt \\ &\quad - \int_{\lambda}^{2\pi - \lambda} \frac{(re^{it})^\alpha P(re^{it})}{Q(re^{it})} i re^{it} dt + \int_{\varepsilon}^R \frac{(t + i\delta)^\alpha P(t + i\delta)}{Q(t + i\delta)} dt. \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{C}{|z|^2} \text{ se } |z| \geq R_0 \quad \text{e} \quad \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq C' \text{ se } |z| < R_0,$$

da cui

$$\alpha < 1 \quad \left| \int_{\vartheta}^{2\pi - \vartheta} \frac{(Re^{it})^\alpha P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} i Re^{it} dt \right| \leq \int_{\vartheta}^{2\pi - \vartheta} R^\alpha \frac{C}{R^2} R dt = R^{\alpha-1} C (2\pi - 2\vartheta) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0,$$

$$\alpha > 0 \quad \left| \int_{\lambda}^{2\pi - \lambda} \frac{(re^{it})^\alpha P(re^{it})}{Q(re^{it})} i re^{it} dt \right| \leq \int_{\lambda}^{2\pi - \lambda} r^\alpha C' r dt = r^{\alpha+1} C' (2\pi - 2\lambda) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Inoltre

$$\int_{\varepsilon}^R \frac{(t + i\delta)^\alpha P(t + i\delta)}{Q(t + i\delta)} dt \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^R \frac{t^\alpha P(t)}{Q(t)} dt \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{R \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} t^\alpha \frac{P(t)}{Q(t)} dt,$$

dove in questo caso tendevamo all'asse reale da sopra, quindi la nostra determinazione del logaritmo ci dice

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z} \rightarrow x^\alpha.$$

Nell'ultimo caso, quando ciò avviene da sotto l'asse reale, avremo

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z} = e^{\alpha \ln x} e^{\alpha 2\pi i},$$

da cui

$$\int_{\varepsilon}^R \frac{(t - i\delta)^\alpha P(t - i\delta)}{Q(t - i\delta)} dt \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} e^{2\pi i \alpha} \int_{\varepsilon}^R \frac{t^\alpha P(t)}{Q(t)} dt \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{R \rightarrow +\infty} e^{2\pi i \alpha} \int_0^{+\infty} t^\alpha \frac{P(t)}{Q(t)} dt.$$

Quindi

$$2\pi i \sum_i \operatorname{Res}(f, z_i) = (1 - e^{2\pi i \alpha}) \int_0^{+\infty} t^\alpha \frac{P(t)}{Q(t)} dt.$$

A questo punto è sufficiente calcolare i residui di f , i quali corrispondono agli zeri complessi di Q , per completare il calcolo dell'integrale.

6 | CENNI DI GEOMETRIA IPERBOLICA

6.1 LEMMA DI SCHWARZ

Teorema 6.1 – Lemma di Schwarz

Sia $f: B(0; 1) \rightarrow B(0; 1)$ olomorfa tale che $f(0) = 0$. Allora

- $|f'(0)| \leq 1$;
- se $|f'(0)| = 1$ si ha $f(z) = e^{i\vartheta}z$ con $\vartheta \in \mathbb{R}$.

Inoltre

$$|f(z)| \leq |z|, \forall z \in B(0; 1),$$

e, se $|f(z_0)| = |z_0|$ per qualche $z_0 \in B(0; 1) \setminus \{0\}$, allora $f(z) = e^{i\vartheta}z$ con $\vartheta \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Per ipotesi f è olomorfa e $f(0) = 0$, quindi

$$f(z) = a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$$

$$a_0 = f(0) = 0$$

Definiamo

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} = a_1 + a_2z + a_3z^2 + \dots$$

Prendo $r < 1$ e applico a g il principio del massimo su $B(0; r)$. Quindi

$$|g(z)| \leq \sup_{|w|=r} |g(w)| \quad \text{se } |z| < r.$$

Ora

$$\sup_{|w|=r} |g(w)| = \sup_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{|w|} \leq \frac{1}{r} \implies |g(z)| \leq \frac{1}{r} \quad \text{se } |z| < r.$$

Quindi, per $r \rightarrow 1$, avremo

$$|g(z)| \leq 1 \iff |f(z)| \leq |z|, \forall z \in B(0; 1).$$

Mostriamo ora che se $|f(z_0)| = |z_0|$ con $z_0 \in B(0; 1)$ allora $f(z) = e^{i\vartheta}z$. Da $|f(z_0)| = |z_0|$ segue $|g(z_0)| = 1$. Ma $z_0 \in B(0; 1)$, quindi per il principio del massimo

$$g(z) \equiv c.$$

D'altronde $|g(z_0)| = 1$ quindi $|c| = 1 \implies c = e^{i\vartheta}$. Da cui

$$f(z) = e^{i\vartheta}z.$$

Mostriamo ora le affermazioni riguardo alla derivata. Sfruttiamo il rapporto incrementale:

$$|f'(0)| = \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{f(z) - f(0)}{z} \right| = \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{f(z)}{z} \right| = \lim_{z \rightarrow 0} |g(z)| \leq 1,$$

poiché abbiamo precedentemente dimostrato che $|g(z)| \leq 1, \forall z \in B(0; 1)$. Supponiamo infine che $|f'(0)| = 1$. Dalla scrittura in forma di serie di $g(z)$ si deduce immediatamente che $f'(0) = a_1$, quindi

$$|f'(0)| = 1 \iff |g(0)| = 1,$$

cioè g assume il massimo nell'origine, che è un punto interno a $B(0; 1)$. Quindi, nuovamente per il principio del massimo, si ha

$$g(z) \equiv c \equiv e^{i\vartheta},$$

da cui $f(z) = e^{i\vartheta}z$. □

6.2 AUTOMORFISMI DEL DISCO UNITARIO

In questo paragrafo cercheremo di determinare gli automorfismi del disco unitario. Dove con automorfismo intendiamo una mappa biettiva e biolomorfa in se stessa. Una volta determinato ciò, saremo in grado di classificare anche gli automorfismi di \mathbb{C} e della sfera di Riemann.

Definizione 6.2 – Mappa di Möbius

Sia $a \in \mathbb{C}$ con $|a| < 1$. Una trasformazione lineare fratta g si definisce *di Möbius* se è del tipo

$$g(z) = e^{i\vartheta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Teorema 6.3 – Automorfismi del disco unitario

Le mappe di Möbius sono tutti e soli gli automorfismi del disco unitario.

Dimostrazione. Sia g una mappa di Möbius, mostriamo che $g \in \text{Aut}(B(0; 1))$: sia $z = e^{it}$ un punto della circonferenza unità, allora

$$\begin{aligned} |g(e^{it})| &= \left| \frac{e^{it} - a}{1 - \bar{a}e^{it}} \right| = \left| e^{-it} \frac{e^{it} - a}{e^{-it} - \bar{a}} \right| = |e^{-it}| \left| \frac{e^{it} - a}{e^{-it} - \bar{a}} \right| = \left| \frac{e^{it} - a}{e^{-it} - \bar{a}} \right| \\ &= \left| \frac{e^{it} - a}{\overline{e^{it} - a}} \right| = 1. \end{aligned}$$

Quindi g manda i punti della circonferenza unitaria in se stessi. Inoltre $g(a) = 0$, dove per definizione $a \in B(0; 1)$. Quindi, per connessione, g manda il disco unitario nel disco unitario.

Inoltre è facile verificare che g^{-1} è ancora una mappa di Möbius. Dalla teoria sulle lineari fratte sappiamo infatti che esse sono in corrispondenza con le matrici. In particolare g^{-1} sarà in corrispondenza con

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -\bar{a} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 - |a|^2} \begin{pmatrix} 1 & \bar{a} \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

che è ancora della forma associata alle mappe di Möbius. Osserviamo che entrambe sono olomorfe in $B(0; 1)$ in quanto i rispettivi poli non appartengono al disco unitario. Per cui le mappe di Möbius sono automorfismi del disco unitario.

Viceversa sia $h \in \text{Aut}(B(0; 1))$, dimostriamo che h è di Möbius. Supponiamo che $h(0) = a$ dove $|a| < 1$ in quanto $\text{Im}(h) \subseteq B(0; 1)$. Definiamo la seguente mappa di Möbius:

$$g(z) = -\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Poniamo inoltre $H(z) = g \circ h(z)$. Osserviamo che H è la composizione di due automorfismi ed è pertanto un automorfismo. Inoltre

$$H(0) = g(h(0)) = g(a) = 0,$$

quindi H è un automorfismo del disco unitario che fissa l'origine. Possiamo applicare il lemma di Schwarz: per prima cosa osserviamo che

$$|H'(0)| \leq 1.$$

Inoltre, dal momento che anche H^{-1} è un automorfismo del disco unitario che fissa l'origine, avremo

$$1 \geq |(H^{-1})'(0)| = \left| \frac{1}{H'(w)|_{w=H^{-1}(0)}} \right| = \left| \frac{1}{H'(0)} \right| \implies |H'(0)| \geq 1.$$

Quindi $|H'(0)| = 1$. Possiamo quindi applicare ulteriormente Schwarz, ottenendo

$$H(z) = e^{i\vartheta} z \quad \text{con } \vartheta \in \mathbb{R}.$$

Ricordando la definizione di H :

$$e^{i\vartheta} z = H(z) = g \circ h(z) \implies h(z) = g^{-1}(e^{i\vartheta} z)$$

che è una mappa di Möbius in quanto composizione di mappe di Möbius. Osserviamo infatti che $e^{i\vartheta} z$ è di Möbius se nella forma generale prendiamo $\alpha = 0$. \square

6.3 DISTANZA IPERBOLICA

Preso $\gamma: [0, 1] \rightarrow B(0; 1)$ una curva di classe C^1 . Sappiamo che possiamo definirne la lunghezza come

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Presi inoltre due punti A, B possiamo determinare la loro distanza euclidea come

$$d(A, B) = \inf \left\{ \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt : \gamma \in C^1, \gamma(0) = A, \gamma(1) = B \right\}.$$

Questa non è altro che la definizione di geodetica in uno spazio euclideo. Preso $\alpha: \overline{B(0; 1)} \rightarrow (0, +\infty)$, possiamo perturbare tale geodetica. Moralmente invece che prendere la retta come distanza più breve fra due punti, prendiamo il percorso più economico nella regione di γ . Questo avviene evitando le zone dove α assume valori troppo elevati e quindi costosi.

In questo paragrafo troveremo un valore di α che sia "adatto" al disco unitario.

Definizione 6.4 – Lunghezza non euclidea

Sia $\gamma: [0, 1] \rightarrow B(0, 1)$ una curva di classe C^1 . Sia $\alpha: \overline{B(0; 1)} \rightarrow (0, +\infty)$. Definiamo la *lunghezza non euclidea* di γ relativa ad α , come

$$L_\alpha(\gamma) = \int_0^1 \alpha(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Definizione 6.5 – Distanza non euclidea

Siano $A, B \in B(0, 1)$ e sia $\alpha: \overline{B(0; 1)} \rightarrow (0, +\infty)$. Definiamo la *distanza non euclidea* tra A e B come

$$d_\alpha(A, B) = \inf \left\{ \int_0^1 \alpha(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt : \gamma \in C^1(0, 1), \gamma(0) = A, \gamma(1) = B \right\}.$$

Proposizione 6.6 – La distanza non euclidea è una distanza

Fissato $\alpha: \overline{B(0; 1)} \rightarrow (0, +\infty)$, d_α costituisce una distanza.

Dimostrazione. Affinché d_α sia una distanza deve essere positiva, simmetrica e soddisfare la triangolare. Per prima cosa osserviamo che gli integrali delle lunghezze non dipendono dalla parametrizzazione per un ben noto fatto di analisi. Quindi abbiamo

$$d_\alpha(A, B) = d_\alpha(B, A).$$

Inoltre $\alpha: \overline{B(0; 1)} \rightarrow (0, +\infty)$ per cui $\text{Im}(\alpha)$ è compatto. In particolare $\alpha(z) \geq \varepsilon$ per un $\varepsilon > 0$. Quindi

$$d_\alpha(A, B) = \inf \left\{ \int_0^1 \alpha(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt \right\} \geq \inf \left\{ \int_0^1 \varepsilon |\dot{\gamma}(t)| dt \right\} = \varepsilon d(A, B),$$

e pertanto d_α è positiva e $d_\alpha(A, B) = 0 \implies A = B$. Infine per dimostrare la validità della disuguaglianza triangolare, prendo γ tale che

$$\gamma(0) = A, \gamma(1) = B \quad \text{e} \quad \int_0^1 \alpha(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt \leq d_\alpha(A, B) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Analogamente prendo $\tilde{\gamma}$ tale che

$$\tilde{\gamma}(0) = B, \tilde{\gamma}(1) = C \quad \text{e} \quad \int_0^1 \alpha(\tilde{\gamma}(t)) |\dot{\tilde{\gamma}}(t)| dt \leq d_\alpha(B, C) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Infine definisco

$$\hat{\gamma} = \begin{cases} \gamma(2t) & t \in [0, 1/2] \\ \tilde{\gamma}(2t-1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

notando che $\hat{\gamma}(0) = A$ e $\hat{\gamma}(1) = C$. A questo punto, sfruttando prima la definizione di estremo inferiore e poi l'invarianza per parametrizzazione, otteniamo

$$\begin{aligned} d_\alpha(A, C) &\leq \int_0^1 \alpha(\hat{\gamma}(t)) |\dot{\hat{\gamma}}(t)| dt = \int_0^1 \alpha(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt + \int_0^1 \alpha(\tilde{\gamma}(t)) |\dot{\tilde{\gamma}}(t)| dt \\ &\leq d_\alpha(A, B) + d_\alpha(B, C) + \varepsilon \end{aligned}$$

dove ε è arbitrario. Da cui la triangolare. □

è lecito per la
definizione di
estremo inferiore

Osservazione. A questo punto vorremmo scegliere α tale che d_α sia invariante per automorfismi del disco. Ovvero tale che

$$d_\alpha(A, B) = d_\alpha(g(A), g(B)), \quad \forall A, B \in B(0; 1) \quad \forall g \in \text{Aut}(B(0; 1)).$$

In particolare, ricordando che gli automorfismi di $B(0; 1)$ sono tutte sole le mappe di Möbius, ci basta trovare un α tale che le mappe di Möbius conservino la lunghezza delle curve. Ovvero $L_\alpha(\gamma) = L_\alpha(g(\gamma))$. Per definizione

$$L_\alpha(\gamma) = \int_0^1 \alpha(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Ora

$$L_\alpha(g(\gamma)) = \int_0^1 \alpha(g(\gamma(t))) \left| \frac{d}{dt} g \circ \gamma(t) \right| dt = \int_0^1 \alpha(g(\gamma(t))) |g'_{|\gamma(t)}| |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Affinché tali integrali siano uguali, possiamo richiedere che lo siano gli integrandi. Ci basta quindi mostrare che

$$\alpha(\gamma(t)) = \alpha(g(\gamma(t))) |g'_{|\gamma(t)}|.$$

D'altronde γ può passare per qualsiasi $z \in B(0; 1)$, quindi è sufficiente chiedere

$$\alpha(z) = \alpha(g(z)) |g'(z)|, \forall g \text{ di Möbius} \quad (\star)$$

Procediamo definendo $\alpha(0) = 2$ e cercando di imporre (\star) . Definiamo una generica mappa di Möbius

$$g(z) = e^{i\vartheta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}.$$

Osserviamo che

$$g(0) = -z_0 e^{i\vartheta} \quad \text{e} \quad |g'(0)| = 1 - |z_0|^2.$$

Imponendo (\star) in $z = 0$, otteniamo

$$2 = \alpha(-z_0 e^{i\vartheta})(1 - |z_0|^2).$$

Per cui definendo

$$\alpha(z) = \frac{2}{1 - |z|^2} \implies \alpha(-z_0 e^{i\vartheta}) = \frac{2}{1 - |z_0 e^{i\vartheta}|} = \frac{2}{1 - |z_0|^2},$$

che soddisfa (\star) . Possiamo quindi definire la lunghezza e la distanza iperbolica.

Definizione 6.7 – Lunghezza iperbolica

Sia $\gamma: [0, 1] \rightarrow B(0; 1)$ una curva C^1 a tratti. Definiamo la sua *lunghezza iperbolica* come

$$L_{ip}(\gamma) = \int_0^1 \frac{2}{1 - |\gamma(t)|^2} |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Definizione 6.8 – Distanza iperbolica

Presi $A, B \in B(0; 1)$ definiamo la loro *distanza iperbolica* come

$$d_{ip}(A, B) = \inf \left\{ \int_0^1 \frac{2}{1 - |\gamma(t)|^2} |\dot{\gamma}(t)| dt : \gamma \in C^1([0, 1], B(0; 1)), \gamma(0) = A, \gamma(1) = B \right\}.$$

Notazione. Faremo riferimento alla distanza iperbolica anche con il termine *geodetica*. Questo termine, che nella sua accezione più generale indica la distanza fra due punti in un certo spazio metrico, è particolarmente indicato nella geometria iperbolica.

Teorema 6.9 – Distanza iperbolica invariante per automorfismi del disco

La distanza iperbolica su $B(0; 1)$ è invariante per automorfismi.

Dimostrazione. Dall'osservazione precedente sappiamo che è sufficiente dimostrare che

$$\alpha(z) = \alpha(g(z)) |g'(z)|, \forall g \in \text{Aut}(B(0; 1)). \quad (\star)$$

Dalla definizione di α e per l'osservazione precedente, sappiamo che ciò è vero per $z = 0$, ovvero

$$\alpha(0) = \alpha(g(0))|g'(0)|, \forall g \in \text{Aut}(B(0; 1)).$$

Sia quindi $g \in \text{Aut}(B(0; 1))$ e $z_0 \in B(0; 1)$. Prendiamo $h \in \text{Aut}(B(0; 1))$ tale che $h(0) = z_0$, esplicitamente

$$h(z) = -\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}.$$

Dal momento che la composizione di automorfismi è un automorfismo, la (\star) è valida in $g \circ h(0)$, ovvero

$$\alpha(0) = \alpha(g \circ h(0))|(g \circ h)'(0)| = \alpha(g(z_0))|g'|_{z_0}|h'(0)|.$$

Da cui

$$\alpha(0)|h'(0)|^{-1} = \alpha(g(z_0))|g'(z_0)|.$$

D'altronde ciò vale anche in $h(0)$:

$$\alpha(0) = \alpha(h(0))|h'(0)| \implies \alpha(0)|h'(0)|^{-1} = \alpha(h(0)) = \alpha(z_0).$$

Combinando i due risultati otteniamo

$$\alpha(z_0) = \alpha(0)|h'(0)|^{-1} = \alpha(g(z_0))|g'(z_0)|$$

ovvero la tesi. □

6.4 GEODETICHE IPERBOLICHE

A questo punto è lecito chiedersi se tale distanza si realizza mai come una geodetica sul disco, ovvero se l'estremo inferiore nella definizione di d_{ip} è un minimo.

Una strada percorribile sarebbe quella di verificare il teorema di Weierstrass. D'altronde ciò richiederebbe lo studio di una topologia funzionale con buone proprietà di compattezza. Nonostante sia possibile, questa strada esula dai fini di questo corso. Per rispondere alla domanda, in questo paragrafo esibiremo esplicitamente la geodetica che costituisce il minimo.

Per prima cosa vediamo cosa accade se uno dei due punti è l'origine

Proposizione 6.10 – Geodetica dall'origine

Sia $A \in B(0; 1)$. Allora

$$d_{ip}(0, A) = \ln \frac{1 + |A|}{1 - |A|}.$$

Dimostrazione. Per prima cosa studiamo il caso in cui $A \in (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$. Sia $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow B(0; 1)$, $t \mapsto At$ il segmento fra 0 e A . Affermiamo che

$$d_{ip}(0, A) = L(\tilde{\gamma}).$$

Supponiamo che $\gamma: [0, 1] \rightarrow B(0; 1)$ sia una seconda curva C^1 a tratti tale che $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(1) = A$. Per dimostrare la tesi è sufficiente verificare che

$$L_{ip}(\gamma) \geq L_{ip}(\tilde{\gamma}).$$

Applichiamo la definizione di lunghezza iperbolica a $\tilde{\gamma}$:

$$\begin{aligned} L_{ip}(\tilde{\gamma}) &= \int_0^1 \frac{2}{1 - |\tilde{\gamma}(t)|^2} |\dot{\tilde{\gamma}}(t)| dt = \int_0^1 \frac{2}{1 - |At|^2} |A| dt = \int_0^1 \frac{2}{1 - (At)^2} A dt \\ &\stackrel{s=At}{=} \int_0^A \frac{2}{1 - s^2} ds = \int_0^A \left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s} \right) ds = \ln \frac{1+A}{1-A}. \end{aligned}$$

possiamo togliere
il modulo perché
 $A \in \mathbb{R}$

Poniamo $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, dalle ipotesi su γ avremo che

$$\gamma(0) = 0 \implies \alpha(0) = 0 \quad \text{e} \quad \gamma(1) = A \implies \alpha(1) = A.$$

Applichiamo nuovamente la definizione di lunghezza iperbolica:

$$\begin{aligned} L_{\text{ip}}(\gamma) &= \int_0^1 \frac{2}{1-|\gamma(t)|^2} |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_0^1 \frac{2\sqrt{\dot{\alpha}(t)^2 + \dot{\beta}(t)^2}}{1-(\alpha(t)^2 + \beta(t)^2)} dt \geq \int_0^1 \frac{2|\dot{\alpha}(t)|}{1-\alpha(t)^2} dt \\ &\geq \left| \int_0^1 \frac{2\dot{\alpha}(t)}{1-\alpha(t)^2} dt \right| = \left| \int_0^A \frac{2}{1-s^2} ds \right| = \left| \int_0^A \left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s} \right) ds \right| \quad s = \alpha(t) \\ &= \ln \frac{1+A}{1-A} = L_{\text{ip}}(\tilde{\gamma}). \end{aligned}$$

Per generalizzare il risultato ad $A \in B(0; 1)$ qualsiasi, osserviamo che le rotazioni sono, in quanto mappe di Möbius, particolare automorfismi del disco. Sappiamo che la lunghezza iperbolica è invariante per gli automorfismi del disco. Quindi se g la rotazione che porta A sull'asse reale, avremo che

$$g(0) = 0 \quad \text{e} \quad g(A) = |A|.$$

Da cui

$$d_{\text{ip}}(0, A) = d_{\text{ip}}(g(0), g(A)) = d_{\text{ip}}(0, |A|) = \ln \frac{1+|A|}{1-|A|}. \quad \square$$

Osservazione. A questo punto possiamo generalizzare per ogni coppia di punti. Ricordando le proprietà delle lineari fratte che mantengono l'insieme di rette e circonferenze, sarà facile convincersi del prossimo risultato.

Teorema 6.11 – Geodetiche del piano iperbolico

Le geodetiche del piano iperbolico sono tutte e sole le circonferenze ortogonali alla circonferenza unità.

Dimostrazione. Supponiamo che γ sia una circonferenza ortogonale alla circonferenza unitaria. Dal momento che gli automorfismi del disco conservano le geodetiche, possiamo portarla in un diametro. Per farlo prendo a sulla geodetica e definisco il seguente automorfismo

$$g(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

Tale g porta la geodetica in un diametro. Infatti

$$0 = g(a) \in g(\gamma).$$

Quindi $g(\gamma)$ è una circonferenza o una retta ortogonale a S^1 , ma $0 \in g(\gamma)$ quindi $g(\gamma)$ è un diametro. □

Osservazione. Questa metrica ci fornisce un esempio di geometria che non soddisfa il quinto assioma di Euclide. Infatti, se prendiamo una retta ed un punto fuori da essa, vi sono infinite geodetiche passanti per il punto e parallele alla retta data.

Notaione. Il disco $B(0; 1)$, con questa metrica, si chiama anche *Piano di Poincaré*.

6.5 APPENDICE

Proposizione 6.12 – Palle iperboliche

La generica palla iperbolica

$$B_{ip}(z_0; r) = \{z : d_{ip}(z, z_0) < r\}$$

è una palla euclidea.

Dimostrazione. Per prima cosa studiamo le palle nell'origine. Per definizione

$$B_{ip}(0; r) = \{z : d_{ip}(z, 0) < r\} = \left\{z : \ln \frac{1+|z|}{1-|z|} < r\right\} = \{z : |z| < R(r)\} = B(0; R).$$

Per studiare una generica palla iperbolica centrata in z_0 , consideriamo un automorfismo g che porta 0 in z_0 . Segue

$$B_{ip}(z_0; r) = g(B_{ip}(0; r)) = g(B(0; R))$$

che è ancora un cerchio in quanto le lineari fratte mantengono l'insieme dei cerchi e delle rette. \square

Osservazione. Il centro della palla euclidea non è lo stesso della palla iperbolica di partenza. Ciò non toglie che la distanza iperbolica induca la topologia euclidea.

Teorema 6.13 – di Schwarz-Pick

Sia $g: B(0; 1) \rightarrow B(0; 1)$ un endomorfismo del disco unitario olomorfo. Allora

$$d_{ip}(g(A), g(B)) \leq d_{ip}(A, B), \quad \forall A, B \in B(0; 1).$$

Dimostrazione. Basta dimostrare che se γ è una curva di classe C^1 allora $L_{ip}(g(\gamma)) \leq L_{ip}(\gamma)$, ovvero che

$$\begin{aligned} L(g(\gamma)) &= \int_0^1 \frac{2}{1-|g(\gamma(t))|^2} \left| \frac{d}{dt} g \circ \gamma(t) \right| dt = \int_0^1 \frac{2}{1-|g(\gamma(t))|^2} |g'(\gamma(t))| |\dot{\gamma}(t)| dt \\ &\leq \int_0^1 \frac{2}{1-|\gamma(t)|^2} |\dot{\gamma}(t)| dt = L(\gamma). \end{aligned}$$

Tale condizione segue se dimostriamo che

$$\frac{1}{1-|g(z)|^2} |g'(z)| \leq \frac{1}{1-|z|^2}, \quad \forall z \in B(0; 1).$$

Cerchiamo di ricondurci ad una mappa a cui poter applicare il lemma di Schwarz. Fissato $z \in B(0; 1)$, definiamo $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Aut}(B(0; 1))$ tali che

$$\varphi_1(0) = z \quad \text{e} \quad \varphi_2(g(z)) = 0.$$

Definiamo inoltre $F(w) = \varphi_2 \circ g \circ \varphi_1(w)$ che è un endomorfismo olomorfo di $B(0; 1)$ che mappa l'origine in se. Per Schwarz avremo

$$|F'(0)| \leq 1.$$

Dalla regola della catena

$$1 \geq |F'(0)| = |\varphi_2' \circ g \circ \varphi_1(0)| |g'|_{\varphi_1(0)} |\varphi_1'(0)| = |\varphi_2'(g(z))| |g'(z)| |\varphi_1'(0)|.$$

per trovare R
abbiamo
esplicitato la z in
funzione di r

In quanto automorfismi del disco, φ_1 e φ_2 si scrivono esplicitamente:

$$\varphi_1(w) = -\frac{w-z}{1-\bar{z}w} \quad \text{e} \quad \frac{w-g(z)}{1-\bar{g}(z)w},$$

da cui, svolgendo i calcoli,

$$|F'(0)| = \frac{1}{1-|g(z)|^2} |g'(z)| |1-|z|^2| \leq 1$$

che è proprio la tesi. □

6.6 ESERCIZI

Esercizio 6.1. Sia $f: B(0;1) \rightarrow B(0;1)$ olomorfa e tale che $f(0) = a \in B(0;1)$. Fornire una stima di $|f'(0)|$.

Soluzione. L'enunciato è molto simile al lemma di Schwarz, cerchiamo quindi di ripercorrere alcuni punti della dimostrazione. Per ipotesi f è olomorfa e $f(0) = a$, quindi

$$f(z) = a + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

Definiamo

$$g(z) = \frac{f(z) - a}{z} = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots$$

Preso $r < 1$, applichiamo a g il principio del massimo su $B(0;r)$:

$$|g(z)| \leq \sup_{|w|=r} \frac{|f(w) - a|}{|w|} \leq \frac{2}{r} \implies |g(z)| \leq \frac{2}{r} \quad \text{se } |z| < r.$$

Per $r \rightarrow 1$, avremo

$$|g(z)| \leq 2, \quad \forall z \in B(0;1).$$

Andiamo quindi a studiare la derivata:

$$|f'(0)| = \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{f(z) - f(0)}{z} \right| = \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{f(z) - a}{z} \right| = \lim_{z \rightarrow 0} |g(z)| \leq 2.$$

Esercizio 6.2. Sia $f: \{z: \Im z > 0\} \rightarrow B(0;1)$ olomorfa e tale che $f(i) = 0$. Fornire una stima di $|f'(i)|$.

Soluzione. Di nuovo cerchiamo di ripercorrere la dimostrazione del lemma di Schwarz. Per ipotesi f è olomorfa e $f(i) = 0$, quindi

$$f(z) = a_1(z-i) + a_2(z-i)^2 + a_3(z-i)^3 + \dots$$

Definiamo

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-i} = a_1 + a_2(z-i) + a_3(z-i)^2 + \dots$$

Preso $r < 1$, applichiamo a g il principio del massimo su $B(i;r)$:

$$|g(z)| \leq \sup_{|w-i|=r} \frac{|f(w)|}{|w-i|} \leq \frac{1}{r} \implies |g(z)| \leq \frac{1}{r} \quad \text{se } |z-i| < r.$$

Per $r \rightarrow 1$, avremo

$$|g(z)| \leq 1, \quad \forall z \in B(i;r).$$

Andiamo quindi a studiare la derivata:

$$|f'(i)| = \lim_{z \rightarrow i} \left| \frac{f(z) - f(i)}{z-i} \right| = \lim_{z \rightarrow i} \left| \frac{f(z)}{z-i} \right| = \lim_{z \rightarrow i} |g(z)| \leq 1.$$

Esercizio 6.3. Si confronti la lunghezza iperbolica $L_{\text{ip}}(\partial B_{\text{ip}}(0; r))$ di una circonferenza di raggio r con la rispettiva lunghezza euclidea.

Soluzione. Per ipotesi r è il raggio iperbolico, se poniamo R quello euclideo avremo che

$$r = \ln \frac{1+R}{1-R}$$

Calcoliamo la lunghezza della circonferenza con la definizione di lunghezza iperbolica. Sia $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto R e^{it}$, segue

$$L_{\text{ip}}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \frac{2}{1-|\gamma(t)|^2} |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_0^{2\pi} \frac{2}{1-R^2} R dt = \frac{4\pi R}{1-R^2}.$$

Esplicitiamo R in termini di r :

$$r = \ln \frac{1+R}{1-R} \implies e^r = \frac{1+R}{1-R} \implies R = \frac{e^r - 1}{e^r + 1},$$

da cui

$$L_{\text{ip}}(\gamma) = 2\pi \sinh(r).$$

Quindi la lunghezza iperbolica cresce in modo esponenziale, infatti

$$2\pi \sinh(r) \simeq e^r \quad \text{per } r \text{ grande.}$$

Esercizio 6.4. Usando una trasformazione di Möbius, dimostrare che

$$d_{\text{ip}}(t, w) = \ln \frac{|1 + t\bar{w}| + |t - w|}{|1 - t\bar{w}| - |t - w|}.$$

Soluzione. Sia $g(z) \in \text{Aut}(B(0; 1))$ tale che $g(w) = 0$, esplicitamente

$$g(z) = \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}.$$

In quanto automorfismo del disco, le distanze vengono preservate. Quindi

$$d_{\text{ip}}(t, w) = d_{\text{ip}}(g(t), g(w)) = d_{\text{ip}}(g(t), 0) = d_{\text{ip}}(0, g(t)).$$

Abbiamo già studiato l'espressione della distanza iperbolica se un punto è l'origine:

$$d_{\text{ip}}(0, g(t)) = \ln \frac{1 + |g(t)|}{1 - |g(t)|}.$$

Svolgendo i calcoli si giunge alla tesi.

7 | FUNZIONI ARMONICHE

7.1 INTRODUZIONE

Le funzioni armoniche sono uno strumento utile in fisica per il calcolo dei potenziali (elettrico, gravitazionale, ecc.). In questo paragrafo daremo la definizione di funzione armonica e studieremo alcune applicazioni in fisica.

Definizione 7.1 – Funzione armonica

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. f si dice *armonica* in Ω se

$$\Delta f(x, y) := \partial_{xx}^2 f(x, y) + \partial_{yy}^2 f(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Notazione. L'operatore Δ si chiama *laplaciano*.

Osservazione. Il laplaciano Δf può essere anche espresso in coordinate polari:

$$\Delta f(x, y) = r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f(r, \vartheta)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 f(r, \vartheta)}{\partial \vartheta^2}.$$

Per dimostrare l'uguaglianza è sufficiente scrivere $f(x, y) = f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$ e applicare la regola della catena nel calcolo delle derivate parziali.

Esempio. Il potenziale elettrico di una carica posta in (x_0, y_0)

$$f(x, y) = \ln|(x, y) - (x_0, y_0)|,$$

è una funzione armonica. Infatti, per prima cosa possiamo supporre che, a meno di traslazioni, $(x_0, y_0) = (0, 0)$. A questo punto passiamo in coordinate polari per ottenere

$$f(r, \vartheta) = \ln r \implies \Delta f(r, \vartheta) = r \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{1}{r} \right] = 0.$$

Proposizione 7.2 – Componenti armoniche di funzioni olomorfe

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Se

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

allora u, v sono funzioni armoniche.

Dimostrazione. Se mostriamo che u è armonica, v lo sarebbe di conseguenza, basta infatti moltiplicare f per $-i$. Da Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \partial_x u(x, y) = \partial_y v(x, y) \\ \partial_y u(x, y) = -\partial_x v(x, y) \end{cases} \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Da cui

$$\Delta u(x, y) = \partial_{xx}^2 u(x, y) + \partial_{yy}^2 u(x, y) = \partial_x [\partial_y v(x, y)] - \partial_y [\partial_x v(x, y)] = 0$$

in quanto $v \in C^\infty$ poiché f è olomorfa, in particolare $v \in C^2$; quindi, dal lemma di Schwarz dell'analisi reale, le derivate incrociate sono uguali. \square

Esempio. Riprendiamo l'esempio precedente del potenziale elettrico e mostriamo che è armonico sfruttando la proposizione. Infatti in campo complesso avremo

$$f(x, y) = \ln|(x, y)| = \ln|z| = \Re(\ln z).$$

D'altronde $\ln z$ è olomorfa, quindi la sua parte reale $\ln|z|$ è armonica.

Esempio. Sia $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un compatto e sia $\rho: K \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione positiva Riemann integrabile. Mostriamo che la funzione potenziale generata da ρ

$$V(x, y) = \int_K \ln|(x, y) - (x_0, y_0)| \rho(x_0, y_0) dx_0 dy_0$$

è armonica su $\mathbb{R}^2 \setminus K$. Sfruttiamo la differenziazione sotto segno di integrale:

$$\Delta V(x, y) = \int_K \Delta \ln|(x, y) - (x_0, y_0)| \rho(x_0, y_0) dx_0 dy_0.$$

Abbiamo già visto nell'esempio precedente che $\ln|(x, y) - (x_0, y_0)|$ è armonica se $(x, y) \notin K$. Quindi

$$\Delta \ln|(x, y) - (x_0, y_0)| = 0 \implies \Delta V(x, y) = \int_K 0 dx_0 dy_0 = 0.$$

Teorema 7.3 – Coniugato armonico e funzione olomorfa

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e sia $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione armonica. Sia $B(z_0; r) \subseteq \Omega$. Allora esiste $v \in C^2(B(z_0; r))$ tale che $u + iv$ è olomorfa in $B(z_0; r)$.

Dimostrazione. Consideriamo la forma differenziale

$$\star du = -\partial_y u dx + \partial_x u dy.$$

La scelta segue dal fatto che se v esistesse tale da soddisfare la tesi, il suo differenziale sarebbe proprio $\star du$ per via di Cauchy-Riemann. Ora $\star du \in C^1$ poiché $u \in C^2(\Omega)$. Inoltre $\star du$ è chiusa, infatti

$$\partial_y(-\partial_y u) = \partial_x(\partial_x u) \iff \partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u = 0$$

che è vero per l'ipotesi di u armonica.

A questo punto, per il Lemma di Poincarè, su $B(z_0; r)$ trovo una primitiva v di $\star du$. In particolare il differenziale di v è proprio $\star du$, quindi

$$dv = \partial_x v dx + \partial_y v dy = -\partial_y u dx + \partial_x u dy \implies \begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_y u = -\partial_x v \end{cases}$$

Cioè u, v soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann e quindi $u + iv$ è olomorfa su $B(z_0; r)$. \square

Notazione. La funzione v si chiama *coniugato armonico* di u .

Osservazione. Il teorema ha valore locale, infatti globalmente v può non essere definita. Ad esempio prendiamo $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $u(z) = \ln|z| = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ che sappiamo essere armonica per gli esempi precedenti. In questo caso non esiste v tale che $u + iv$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ poiché $u + iv = \ln z$ che sappiamo non essere definita su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Esempio. Consideriamo

$$u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2).$$

Applicando il teorema troviamo

$$\star du(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Tramite pullback si trova che

$$\star du = d\vartheta \quad \text{con } \vartheta = \arctan \frac{y}{x}$$

ovvero che $\star du$ è esatta.

7.2 PROPRIETÀ PRINCIPALI

Proposizione 7.4 – Proprietà del valor medio per funzioni armoniche

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione armonica. Se $B(z_0; R) \subseteq \Omega$ e $r \in (0, R)$, allora

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{it}) dt.$$

Dimostrazione. Per il teorema precedente posso trovare $v: B(z_0; R) \rightarrow \mathbb{R}$ il coniugato armonico di u . Quindi

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

è olomorfa in $B(z_0; R)$. Se $r < R$, f soddisfa la proprietà del valor medio, quindi

$$\begin{aligned} u(z_0) &= \Re f(z_0) = \Re \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) dt \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re(f(z_0 + r e^{it})) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{it}) dt. \end{aligned}$$

□

Proposizione 7.5 – Principio del massimo per funzioni armoniche

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso e $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione armonica. Allora u non può assumere massimo in Ω a meno di essere costante.

Dimostrazione. Sia $z_0 \in \Omega$ un punto di massimo di u in Ω . Vogliamo dimostrare che $u(z) = u(z_0) \forall z \in \Omega$. Definiamo

$$A = \{z \in \Omega \mid u(z) = u(z_0)\} \quad \text{e} \quad B = \{z \in \Omega \mid u(z) < u(z_0)\}.$$

È chiaro che $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \Omega$. Inoltre B è aperto in quanto $B = u^{-1}(-\infty, u(z_0))$

e u è continua. Se dimostriamo che A è aperto, per connessione avremo che $B = \emptyset$ poichè $z_0 \in A$. Di conseguenza

$$A = \Omega \implies u(z) = u(z_0), \forall z \in \Omega.$$

Sia $z_1 \in A$ e $B(z_1; R) \subseteq \Omega$. Per il valor medio, se $r < R$ avremo

$$u(z_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_1 + r e^{it}) dt.$$

Ora

$$u(z_1) = \max_{z \in \Omega} u(z) \quad \text{mentre} \quad u(z_1 + r e^{it}) \leq \max_{z \in \Omega} u(z).$$

Quindi con un semplice argomento di analisi reale si deduce che

$$u(z_1 + r e^{it}) = u(z_1), \forall t \in [0, 2\pi].$$

Inoltre r è arbitrario in $(0, R)$, quindi tale conclusione vale anche per ogni $r \in (0, R)$. Segue che

$$u(z) = u(z_1) = u(z_0), \forall z \in B(z_1; R)$$

da cui A aperto che implica la tesi. □

7.3 PROBLEMI ELLITTICI

In questo paragrafo introdurremo la risoluzione di problemi ellittici. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è aperto e $\varphi: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, il problema è trovare

$$u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \quad \text{tale che} \quad \begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & \text{se } (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = \varphi(x, y) & \text{se } (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (*)$$

Teorema 7.6 – Unicità della soluzione

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e limitato. Se $(*)$ ha una soluzione allora è unica.

Dimostrazione. Supponiamo che vi siano due soluzioni u_1, u_2 di $(*)$. Consideriamo

$$v(x, y) = u_2(x, y) - u_1(x, y).$$

Ci basta dimostrare che $v(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \Omega$. Per definizione $v \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$. Inoltre

$$\Delta v(x, y) = \Delta u_2(x, y) - \Delta u_1(x, y) = 0,$$

quindi v è armonica. Siccome $\overline{\Omega}$ è compatto, v ammette massimo e minimo in $\overline{\Omega}$. D'altronde, per il principio del massimo per funzioni armoniche, tali massimo e minimo devono essere assunti su $\partial\Omega$ da v . Da cui

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} v(z) = 0$$

poichè sul bordo $u_1(x, y) = \varphi(x, y) = u_2(x, y)$. Per la stessa ragione

$$\min_{z \in \overline{\Omega}} v(z) = 0.$$

Quindi $v(z) = 0, \forall z \in \Omega$. □

Teorema 7.7 – Integrale di Poisson

Sia $\varphi: \partial B(0; R) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora la soluzione di

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & \text{se } (x, y) \in B(0; R) \\ u(x, y) = \varphi(x, y) & \text{se } (x, y) \in \partial B(0; R) \end{cases}$$

è data da

$$u(re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\vartheta - t) + r^2} \varphi(Re^{it}) dt.$$

Dimostrazione. Per prima cosa mostriamo che $\Delta u = 0$. Un modo diretto per mostrarlo sarebbe quello di sfruttare la differenziazione sotto segno di integrale e calcolare direttamente il laplaciano di u . Alternativamente troviamo $v: B(0; R) \rightarrow \mathbb{R}$ il coniugato armonico di u . Quindi avremo $f = u + iv$ olomorfa in $B(0; R)$ a cui possiamo applicare la formula di Cauchy:

$$f(re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})}{Re^{it} - re^{i\vartheta}} i Re^{it} dt.$$

Se sposto il polo $re^{i\vartheta}$ fuori dalla circonferenza $B(0; R)$ ottengo una funzione olomorfa il cui integrale lungo la circonferenza sarà nullo per Cauchy. In particolare

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})}{Re^{it} - \frac{R^2}{re^{-i\vartheta}}} i Re^{it} dt.$$

dove la scelta di $\frac{R^2}{re^{-i\vartheta}}$ è dovuta al fatto che se ho $z_0 \in B(0; R)$, il punto $\frac{R^2}{\bar{z}_0}$ ha lo stesso argomento di z_0 ma il suo modulo è maggiore di R . A questo punto sottraggo le due espressioni precedenti per ottenere

$$f(re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\vartheta - t) + r^2} f(Re^{it}) dt.$$

Ne prendo la parte reale e ottengo che $u(re^{i\vartheta})$ è armonica in quanto parte reale di una funzione olomorfa. Inoltre con lo stesso argomento avremo che $u \in C^2(B(0; R))$. Resta da mostrare che $u \in C(\overline{B(0; R)})$, che nel nostro caso si riduce a verificare la continuità su $\partial B(0; R)$. Per farlo dimostreremo che

$$u(r, \vartheta) \longrightarrow \varphi(Re^{i\vartheta}) \text{ uniformemente per } r \rightarrow R.$$

Ciò implica la continuità al bordo poiché vi è convergenza uniforme e $\varphi \in C(\partial B(0; R))$. Per prima cosa studiamo alcune proprietà del nucleo di Poisson:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\vartheta - t) + r^2} dt = 1. \quad (1)$$

Infatti, se f è olomorfa, dalla formula di Cauchy avremo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})}{Re^{it} - z} i Re^{it} dt,$$

dove chiaramente abbiamo sfruttato la curva $\partial B(0; R)$. Come abbiamo visto nella prima parte della dimostrazione, se al posto di z prendiamo $\frac{R^2}{\bar{z}}$, il medesimo integrale è nullo per il teorema di Cauchy, in quanto la funzione integranda è olomorfa in $B(0; R)$. Da cui

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})}{Re^{it} - z} i Re^{it} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})}{Re^{it} - \frac{R^2}{\bar{z}}} i Re^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\vartheta - t) + r^2} f(Re^{it}) dt \end{aligned}$$

Posto $f \equiv 1$ otteniamo (1).

$$0 \leq \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\vartheta - t) + r^2} \leq \varepsilon \quad \text{se } t \notin [\vartheta - \delta, \vartheta + \delta]. \quad (2)$$

Osserviamo che per $r \rightarrow R$ abbiamo sempre $r \leq R$. Quindi

$$R^2 - r^2 \geq 0.$$

Inoltre se $t \notin [\vartheta - \delta, \vartheta + \delta]$

$$R^2 - 2Rr \cos(\vartheta - t) + r^2 > R^2 - 2Rr + r^2 = (R - r)^2 \geq 0,$$

quindi la prima parte della disuguaglianza è dimostrata. La seconda è altrettanto chiara in quanto $R^2 - r^2 \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow R$. Mentre

$$R^2 - 2Rr \cos(\vartheta - t) + r^2 \rightarrow R^2(1 - 2\cos(\vartheta - t) + 1) > \gamma > 0 \quad \text{se } t \notin [\vartheta - \delta, \vartheta + \delta].$$

Quindi anche la (2) è dimostrata. Mostriamo la convergenza uniforme:

$$\begin{aligned} |u(re^{i\vartheta}) - \varphi(Re^{i\vartheta})| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\vartheta - t) + r^2} \varphi(Re^{it}) dt - \varphi(Re^{i\vartheta}) \right| \\ &\stackrel{(1)}{=} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\vartheta - t) + r^2} [\varphi(Re^{it}) - \varphi(Re^{i\vartheta})] dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\vartheta - t) + r^2}}_{>0 \text{ per (2)}} |\varphi(Re^{it}) - \varphi(Re^{i\vartheta})| dt \end{aligned}$$

Ora φ è continua su $\partial B(0; R)$ compatto, quindi è ivi uniformemente continua. In particolare

$$|\varphi(Re^{it}) - \varphi(Re^{i\vartheta})| \leq \gamma(\delta) \quad \text{con } \gamma(\delta) \rightarrow 0 \text{ se } \delta \rightarrow 0 \text{ e } t \in [\vartheta - \delta, \vartheta + \delta]$$

Spezziamo l'integrale:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi] \setminus [\vartheta - \delta, \vartheta + \delta]} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\vartheta - t) + r^2} |\varphi(Re^{it}) - \varphi(Re^{i\vartheta})| dt \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta - \delta}^{\vartheta + \delta} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\vartheta - t) + r^2} |\varphi(Re^{it}) - \varphi(Re^{i\vartheta})| dt. \quad (\star) \end{aligned}$$

Osserviamo che per il primo integrale possiamo stimare la frazione con (2) e le funzioni in modulo con $2\|\varphi\|_{\text{sup}}$. Per il secondo sfruttiamo la convergenza uniforme per la stima del modulo e ampliamo il dominio di integrazione a $[0, 2\pi]$. Quindi

$$\begin{aligned} (\star) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi] \setminus [\vartheta - \delta, \vartheta + \delta]} 2\varepsilon \|\varphi\|_{\text{sup}} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\vartheta - t) + r^2} \gamma(\delta) dt \\ &\stackrel{(1)}{\leq} 2\varepsilon \|\varphi\|_{\text{sup}} + \gamma(\delta). \end{aligned}$$

In conclusione, dato $\varepsilon > 0$ ho che

$$|u(re^{i\vartheta}) - \varphi(Re^{i\vartheta})| \leq 2\varepsilon \|\varphi\|_{\text{sup}} + \gamma(\delta).$$

Scelgo δ tale che $\gamma(\delta) < \varepsilon$ se r è sufficientemente vicino a R . Quindi

$$|u(re^{i\vartheta}) - \varphi(Re^{i\vartheta})| \leq 2\varepsilon \|\varphi\|_{\text{sup}} + \varepsilon$$

che è la definizione di convergenza uniforme. \square

L'ampliamento del dominio è una maggiorazione valida in quanto la funzione integranda è strettamente positiva

Teorema 7.8 – Caratterizzazione delle funzioni armoniche tramite valor medio

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e sia $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora u è armonica se e soltanto se soddisfa il principio della media, ovvero

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{it}) dt \quad \text{se } \overline{B(z_0; r)} \subseteq \Omega.$$

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato nella teorema 7.4 che se u è armonica allora soddisfa il valor medio.

Supponiamo quindi che u soddisfi la proprietà del valor medio. La proprietà di essere armonica è locale, quindi ci basta dimostrare che u è armonica in ogni $B(z_0; r)$ tale che $\overline{B(z_0; r)} \subseteq \Omega$. Consideriamo una palla con queste proprietà e definiamo

$$v: \overline{B(z_0; r)} \rightarrow \mathbb{C} \quad v(z_0 + \rho e^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho \cos(\vartheta - t) + \rho^2} u(z_0 + r e^{it}) dt.$$

Per quanto visto nella dimostrazione del teorema precedente, v è armonica in $B(z_0; r)$ e continua fino al bordo. Consideriamo $w = u - v$ e dimostriamo che $w \equiv 0$. Osserviamo che w soddisfa il principio della media in quanto u lo soddisfa per ipotesi e v è armonica. D'altronde come abbiamo visto nella dimostrazione della teorema 7.4, il principio della media implica il principio del massimo. Segue che w soddisfa il principio del massimo. D'altronde

$$w(z) = u(z) - v(z) = 0 \quad \text{se } z \in \partial B(z_0; r)$$

poiché v soddisfa il problema ellittico in $B(z_0; r)$ e il dato al bordo è proprio u . Da cui

$$\max_{z \in B(z_0; r)} w(z) = \min_{z \in B(z_0; r)} w(z) = 0 \implies w(z) = 0, \forall z \in B(z_0; r).$$

Quindi u coincide con v che è armonica per costruzione, pertanto u è armonica. \square

7.4 PRINCIPIO DI RIFLESSIONE DI SCHWARZ

In questo paragrafo studieremo un modo per estendere il dominio di una funzione olomorfa, il cui dominio è stato definita all'interno del semipiano superiore e il cui bordo può comprendere parte dell'asse reale. In particolare dimostreremo che l'estensione di $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ a $\overline{\Omega}$ è data da

$$\overline{f(\bar{z})}.$$

Osserviamo che $\overline{\Omega}$ non è la chiusura di Ω ma il suo insieme coniugato, che andremo a definire tra poco. Per raggiungere tale risultato analizzeremo diversi casi, fino a giungere a quello più generale.

Definizione 7.9 – Insieme Coniugato

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un insieme qualsiasi. Si definisce il suo *coniugato* come

$$\overline{\Omega} := \{ \bar{z} \mid z \in \Omega \}.$$

Notazione. Vi è un evidente ambiguità di notazione con la chiusura di un insieme. In questo paragrafo faremo uso dell'insieme coniugato solo in riferimento ad Ω per limitare il problema. Quando sarà necessario specificheremo l'uso di una o dell'altra notazione.

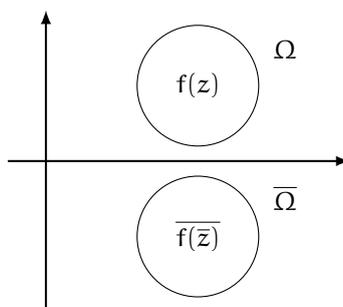
Proposizione 7.10 – Estensione di un dominio nel semipiano superiore

Sia $\Omega \subseteq \{z \mid \Im(z) > 0\}$ tale che $\partial\Omega \cap \mathbb{R} = \emptyset$. Sia inoltre $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Allora

$$g(z): \Omega \cup \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = \begin{cases} f(z) & z \in \Omega \\ \overline{f(\bar{z})} & z \in \overline{\Omega} \end{cases}$$

è olomorfa.

Dimostrazione. Mostriamo in figura i domini della proposizione:



L'olomorfia di $\overline{f(\bar{z})}$ è già stata dimostrata in un precedente esercizio. Possiamo anche dimostrarlo in maniera alternativa osservando che $(\overline{f(\bar{z})})' = f'_{|\bar{z}}$ composta a destra e a sinistra con un ribaltamento. Infatti una rotodilatazione composta con due ribaltamenti è ancora una rotodilatazione. Mostriamolo esplicitamente per una rotazione: la matrice del coniugio è il ribaltamento

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

quindi

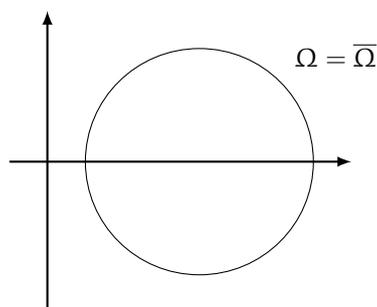
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

che è ancora una rotazione. □

Proposizione 7.11 – Estensione di un dominio coincidente con il suo coniugio

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ tale che $\overline{\Omega} = \Omega$ e $\Omega \cap \mathbb{R}$ è un intervallo. Supponiamo che $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sia una funzione olomorfa tale che $f(x) \in \mathbb{R}$ se $x \in \mathbb{R}$. Allora $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ coincide con $f(z)$.

Dimostrazione. Mostriamo in figura il dominio della proposizione:



Siccome $\overline{\Omega} = \Omega$, g è definito su Ω ed è olomorfa per la proposizione precedente. Osserviamo inoltre che se $x \in \mathbb{R}$, allora

$$g(x) = \overline{f(\bar{x})} = \overline{f(x)} = f(x)$$

in quanto $f(x) \in \mathbb{R}$. Quindi f è g coincidono sull'asse reale. Dal principio di identità, segue che $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$, $\forall z \in \Omega$. \square

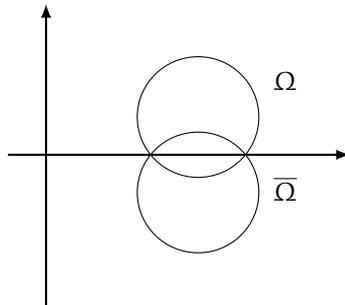
Proposizione 7.12 – Estensione di un dominio che interseca i reali

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto tale che $\Omega \cap \mathbb{R}$ è un intervallo. Sia inoltre $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa tale che $f(x) \in \mathbb{R}$ se $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$g(z): \Omega \cup \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = \begin{cases} f(z) & z \in \Omega \\ \overline{f(\bar{z})} & z \in \bar{\Omega} \end{cases}$$

è ben definita ed olomorfa.

Dimostrazione. Mostriamo in figura i domini della proposizione:



Affinché g sia ben definita basta dimostrare che $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ su $\Omega \cap \bar{\Omega}$. D'altronde ciò è banalmente vero per la proposizione precedente. Inoltre g è olomorfa per la prima proposizione del paragrafo. \square

Teorema 7.13 – Principio di riflessione di Schwarz

Sia $\Omega \subseteq \{z \mid \Im(z) > 0\}$ un aperto tale che $E = \partial\Omega \cap \mathbb{R}$ sia un intervallo aperto. Se $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è armonica e tende a zero su E , allora v ha un'estensione armonica V su $\Omega \cup E \cup \bar{\Omega}$, che soddisfa

$$V(z) = -V(\bar{z}).$$

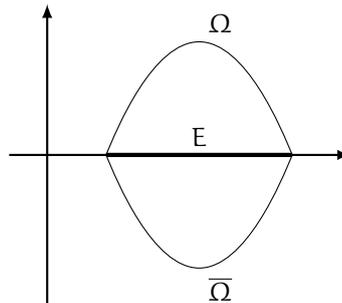
Se poi $f \in H(\Omega) \cap C(\Omega \cup E)$, $f = u + iv$ su Ω e $v(z) = 0$ per $z \in E$, allora

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & z \in \Omega \cup E \\ \overline{f(\bar{z})} & z \in \bar{\Omega} \end{cases}$$

definisce una funzione olomorfa su $\Omega \cup E \cup \bar{\Omega}$.

Dimostrazione. Definiamo $V: \Omega \cup E \cup \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$V(z) = \begin{cases} v(z) & z \in \Omega \\ 0 & z \in E \\ -v(\bar{z}) & z \in \bar{\Omega} \end{cases}$$



Ora V è continua in Ω e $\overline{\Omega}$ perchè v è armonica; è continua su E perchè

$$v(z_n) \longrightarrow 0 \quad \text{se } z_n \rightarrow z_0 \in E$$

per ipotesi. Quindi, affinché V sia armonica, per la caratterizzazione ci basta dimostrare che soddisfa la proprietà del valor medio. Se $z_0 \in \Omega$ e $B(z_0; r)$ è tale che $\overline{B(z_0; r)} \subseteq \Omega$ allora V verifica la proprietà del valor medio in $B(z_0; r)$ poiché v è armonica. Infatti

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(z_0 + r e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + r e^{it}) dt = v(z_0) = V(z_0).$$

Analogamente se $z_0 \in \overline{\Omega}$ e $\overline{B(z_0; r)} \subseteq \overline{\Omega}$, V soddisfa la proprietà della media in $B(z_0; r)$. Infatti

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(z_0 + r e^{it}) dt = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\overline{z_0} + r e^{-it}) dt = -v(\overline{z_0}) = V(z_0).$$

A questo punto è sufficiente verificarlo per $z_0 \in E$. Preso $B(z_0; r)$ avremo

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(z_0 + r e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\pi V(z_0 + r e^{it}) dt + \int_\pi^{2\pi} V(z_0 + r e^{it}) dt \right].$$

Osserviamo che per $t \in [0, \pi]$ i punti $z_0 + r e^{it}$ sono in Ω , mentre per $t \in [\pi, 2\pi]$ sono in $\overline{\Omega}$. Inoltre da $z_0 \in E$ avremo $\overline{z_0} = z_0$. Da cui, per definizione di V ,

$$\frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\pi v(z_0 + r e^{it}) dt - \int_\pi^{2\pi} v(z_0 + r e^{-it}) dt \right] = 0$$

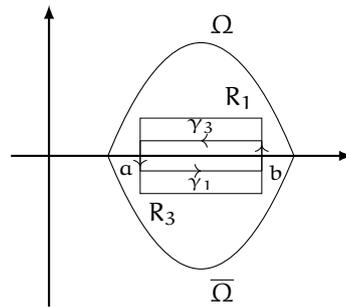
in quanto i due integrali assumono gli stessi valori con il segno scambiato.

Se ora f è definita come per ipotesi. Per definizione F è continua, mostriamo che è olomorfa sfruttando il teorema di Morera. Dobbiamo quindi far vedere che l'integrale di F lungo rettangoli chiusi sufficientemente piccoli è sempre nullo. Se R è un rettangolo interamente contenuto in Ω , avremo

$$\int_{\partial R} F(z) dz = 0$$

per Cauchy. Infatti su Ω , $F \equiv f$ che è olomorfa. Analogamente se $R \subseteq \overline{\Omega}$ poiché abbiamo precedentemente visto che $f(\overline{z})$ è olomorfa. Infine se $R \cap E \neq \emptyset$, suddivido R in 3 rettangoli R_1, R_2, R_3 tali che

$$R_1 \subseteq \Omega \quad \text{e} \quad R_3 \subseteq \overline{\Omega}$$



Quindi

$$\int_{\partial R_1} F(z) dz = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\partial R_3} F(z) dz = 0$$

per Cauchy. Per calcolare l'integrale su ∂R_2 , suddividiamo il rettangolo in 4 curve:

$$\begin{aligned} \gamma_1: [a, b] &\longrightarrow \mathbb{C}, t \longmapsto t - i\delta; & \gamma_2: [-\delta, \delta] &\longrightarrow \mathbb{C}, t \longmapsto b + it; \\ -\gamma_3: [a, b] &\longrightarrow \mathbb{C}, t \longmapsto t + i\delta; & -\gamma_4: [-\delta, \delta] &\longrightarrow \mathbb{C}, t \longmapsto a + it. \end{aligned}$$

anche in questo caso la seconda uguaglianza è lecita perché v è armonica

Chiaramente gli integrali di F lungo γ_2, γ_4 sono nulli per $\delta \rightarrow 0$. Mentre

$$\int_{\gamma_1} F(z) dz = \int_a^b F(t - i\delta) dt = \int_a^b \overline{f(t + i\delta)} dt \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_a^b \overline{f(t)} dt = \int_a^b f(t) dt;$$

$$- \int_{-\gamma_3} F(z) dz = - \int_a^b F(t + i\delta) dt = - \int_a^b f(t + i\delta) dt \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} - \int_a^b f(t) dt.$$

Quindi

$$\int_{\partial \mathbb{R}_2} F(z) dz \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_a^b f(t) dt - \int_a^b f(t) dt = 0.$$

Quindi F è olomorfa. □

7.5 ESERCIZI

Esercizio 7.1. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni armoniche. Determinare sotto quali condizioni

$$\varphi(x, y) = u(x, y)v(x, y),$$

è armonica.

Soluzione. Applicando la regola della catena:

$$d(u \cdot v) = (\partial_x u \cdot v + \partial_x v \cdot u) dx + (\partial_y u \cdot v + \partial_y v \cdot u) dy.$$

Da cui

$$\begin{aligned} \Delta(u \cdot v) &= \partial_x(\partial_x u \cdot v + \partial_x v \cdot u) + \partial_y(\partial_y u \cdot v + \partial_y v \cdot u) \\ &= (\partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u)v + \partial_x u \partial_x v + \partial_y u \partial_y v + (\partial_{xx}^2 v + \partial_{yy}^2 v)u + \partial_x v \partial_x u + \partial_y v \partial_y u \\ &= 2(\partial_x u \partial_x v + \partial_y u \partial_y v). \end{aligned}$$

u, v sono armoniche

Quindi, per definizione, φ è armonica se e soltanto se

$$\Delta(u \cdot v) = 0 \iff \partial_x u \partial_x v + \partial_y u \partial_y v = 0 \iff \left\langle \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Osservazione. Un caso particolare in cui ciò è vero è quando u, v sono parte reale e immaginaria di una funzione olomorfa. In tal caso infatti vale Cauchy-Riemann, da cui

$$\left\langle \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\partial_y u \\ \partial_x u \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

in quanto u è armonica per ipotesi.

Osservazione. Dall'esercizio segue inoltre che se u è armonica, allora u^2 è armonica se e soltanto se u è costante.

Esercizio 7.2. Sia A una sezione del disco unitario determinata dalla retta reale e dalla retta di pendenza $e^{i\frac{\pi}{n}}$. Sia f una funzione olomorfa in A e continua su \bar{A} . Dimostrare che f si può prolungare analiticamente da una mappa del disco al $2n$ -gono regolare.

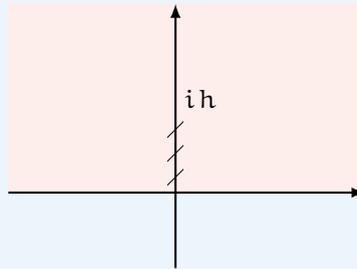
Soluzione. Sfruttiamo la riflessione di Schwarz. Poniamo R il ribaltamento rispetto alla retta di pendenza $e^{i\frac{\pi}{n}}$ e definiamo

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & z \in A \\ R(f(Rz)) & z \in RA. \end{cases}$$

Esercizio 7.3. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto limitato. Siano u, v armoniche in Ω e continue fino al bordo. Dimostrare che se $u \leq v$ su $\partial\Omega$, allora $u \leq v$ su Ω .

Soluzione. Consideriamo la funzione $\varphi = u - v$. Per ipotesi φ è armonica e $\varphi|_{\partial\Omega} \leq 0$. In quanto funzione armonica, φ soddisfa il principio del massimo. Quindi il massimo di $u - v$ viene assunto al bordo. In particolare $u - v \leq 0$ su tutto Ω , da cui la tesi.

Esercizio 7.4. Si mandi il dominio Ω in figura nel semipiano superiore tramite una funzione olomorfa:



Soluzione. Tramite la mappa z^2 mandiamo Ω in $\mathbb{C} \setminus \{[-h^2, +\infty)\}$. Tramite $z + h^2 + \frac{1}{4}$ lo trasliamo in $\mathbb{C} \setminus \{[1/4, +\infty)\}$. A questo punto prendiamo l'inversa della mappa di Koebe, precedentemente analizzata e arriviamo in $B(0; 1)$. Infine utilizziamo la mappa

$$-i \frac{z+1}{z-1}$$

per mandare il disco unitario nel semipiano superiore.

Esercizio 7.5. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione armonica non costante. Dimostrare che i punti $(x, y) \in \Omega$ tali che $\nabla u(x, y) = 0$ determinano un insieme discreto.

Soluzione. Per il coniugato armonico, localmente, in ogni palla $B(z_0; r) \subseteq \Omega$, trovo $v: B(z_0; r) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(z) = u(z) + iv(z)$ è olomorfa in $B(z_0; r)$. Ora se $\nabla u(x, y) = 0$, per Cauchy-Riemann, $\nabla v(x, y) = 0$. Quindi $f'(z) = 0$ per $z = x + iy$. D'altronde gli zeri di f' non possono essere di accumulazione in $B(z_0; r)$, altrimenti $f'(z) \equiv 0$ in $B(z_0; r)$ da cui seguirebbe f costante che è assurdo per ipotesi.

8 | ESTENSIONI ANALITICHE

8.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo affronteremo due problemi principali:

- L'estensione di una funzione olomorfa in $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ al di fuori di Ω .
- La definizione di funzioni a valori multipli come $\ln z$ e \sqrt{z} .

Ci occuperemo in particolare del primo. Mostrando ad esempio quale relazione vi è fra

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} z^n \quad \text{definita su } B(0; 1),$$

e

$$g(z) = \frac{1}{1-z} \quad \text{definita su } \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

che è chiaramente un'estensione di f .

Definizione 8.1 – Punto regolare

Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un disco e sia $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Diciamo che $\beta \in \partial D$ è un *punto regolare* per f , se esiste un disco D_1 centrato in β e una funzione $g \in H(D_1)$, tale che

$$f(z) = g(z) \quad \forall z \in D \cap D_1.$$

Notazione. Se β non è un punto regolare lo chiamiamo *punto singolare*.

Teorema 8.2 – Punto singolare per serie di potenze

Sia $f(z) = \sum a_n z^n$ una serie di potenze che ha raggio di convergenza R . Allora f ha almeno un punto singolare su $\partial B(0; R)$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che f non abbia punti singolari. Quindi, per definizione, per ogni $\beta \in \partial B(0; R)$, trovo D_β un disco centrato in β su cui è definita un'estensione g_β di f . Per compattezza di $\partial B(0; R)$ vi è un ricoprimento finito di tali dischi, quindi trovo $D_{\beta_1}, \dots, D_{\beta_n}$ tali che

$$\bigcup_{i=1}^n D_{\beta_i} \supseteq \partial B(0; R).$$

Definiamo

$$h: B(0; R) \cup \bigcup_{i=1}^n D_{\beta_i} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \begin{cases} f(z) & z \in B(0; R) \\ g_{\beta_i}(z) & z \in D_{\beta_i} \end{cases}$$

Osserviamo che, per ipotesi,

$$f(z) = g_{\beta_i}(z) \quad \text{se } z \in B(0; R) \cap D_{\beta_i}.$$

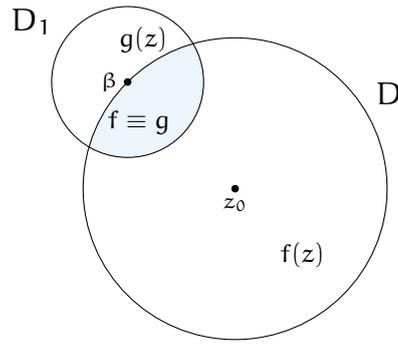


Figura 8.1: Punto regolare.

Quindi affinché h sia ben definita resta da mostrare che

$$D_{\beta_i} \cap D_{\beta_j} \neq \emptyset \implies g_{\beta_i}(z) = g_{\beta_j}(z) \quad \text{se } z \in D_{\beta_i} \cap D_{\beta_j}.$$

Ora $D_{\beta_i} \cap D_{\beta_j} \neq \emptyset \implies D_{\beta_i} \cap D_{\beta_j} \cap B(0; R) \neq \emptyset$, quindi, per ipotesi,

$$g_{\beta_i}(z) = f(z) = g_{\beta_j}(z) \quad \text{se } z \in D_{\beta_i} \cap D_{\beta_j} \cap B(0; R).$$

Pertanto g_{β_i}, g_{β_j} coincidono su tutto $D_{\beta_i} \cap D_{\beta_j}$ per il principio di identità. D'altronde

$$B(0; R) \cup \bigcup_{i=1}^n D_{\beta_i} \supseteq B(0; R + \varepsilon) \quad \text{per un } \varepsilon > 0.$$

Quindi il raggio di convergenza di f è maggiore o uguale a $R + \varepsilon$. Ciò è assurdo poiché tale raggio è R per ipotesi. \square

Osservazione. L'esistenza di punti singolari non ha molto a che fare con la convergenza della serie sul bordo. Ad esempio

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2},$$

ha raggio di convergenza $R = 1$. Inoltre converge in ogni z con $|z| = 1$. D'altronde deve avere un punto singolare per il teorema precedente.

Esempio. La funzione

$$f(z) = z + z^2 + z^4 + z^8 + \dots = \sum_{n \geq 0} z^{2^n}$$

ha raggio di convergenza $R = 1$. Mostriamo che ogni punto sul bordo del disco $B(0; 1)$ è singolare. Per farlo dimostreremo che f è illimitato in un intorno dei punti

$$e^{2\pi i \frac{j}{2^k}} \quad \text{con } j, k \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che l'insieme di tali punti è denso in $\partial B(0; 1)$, segue che f non può avere punti regolari. Per $j = 0$, consideriamo $f(r)$ al tendere di $r \rightarrow 1$:

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(r) = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n \geq 0} r^{2^n} \geq \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^N r^{2^n} = N + 1 \quad \text{con } N \text{ arbitrario.}$$

Quindi $f(r) \rightarrow +\infty$. Per gli altri j , osserviamo che

$$f(z^2) = f(z) - z \implies f(z) = f(z^2) + z.$$

Quindi in un intorno di -1 , avremo

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} f(-r) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f(r e^{i\pi}) = \lim_{r \rightarrow 1^-} [f(r^2) + r e^{i\pi}] = \lim_{r \rightarrow 1^-} [f(r^2) - r] = +\infty.$$

Analogamente si mostra per gli altri punti.

8.2 PROLUNGAMENTO ANALITICO

Supponiamo di avere funzioni come $\ln z$ o \sqrt{z} . L'idea alla base del prolungamento analitico, è quella di partire dalla loro scrittura in serie di potenze (quindi nel dominio del disco di convergenza), ed estenderle passo passo in dischi che intersecano il precedente.

Definizione 8.3 – Elemento analitico

Un *elemento analitico* è una coppia (f, D) , con D un disco e $f \in H(D)$.

Definizione 8.4 – Continuazione diretta

Siano (f_1, D_1) e (f_2, D_2) due elementi analitici. Diciamo che (f_2, D_2) è una *continuazione diretta* di (f_1, D_1) se

- $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$;
- $f_1(z) = f_2(z)$ per ogni $z \in D_1 \cap D_2$.

Notazione. Se (f_2, D_2) è una continuazione diretta di (f_1, D_1) , scriviamo

$$(f_1, D_1) \sim (f_2, D_2).$$

Definizione 8.5 – Catena analitica

Siano D_0, \dots, D_n una successione di dischi con $D_i \cap D_{i+1} \neq \emptyset$. (D_0, \dots, D_n) si definisce *catena analitica* se esistono elementi analitici $(f_0, D_0), \dots, (f_n, D_n)$ tali che

$$(f_{i+1}, D_{i+1}) \sim (f_i, D_i) \forall i = 0, \dots, n-1.$$

Definizione 8.6 – Prolungamento analitico

Supponiamo di avere una catena analitica i cui elementi analitici sono $(f_0, D_0), \dots, (f_n, D_n)$. Diciamo che (f_n, D_n) è il *prolungamento analitico* di (f_0, D_0) lungo la catena (D_0, \dots, D_n) .

Proposizione 8.7 – Transitività della continuazione diretta

Siano D_1, D_2, D_3 dischi tali che $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \neq \emptyset$. Se $(f_1, D_1) \sim (f_2, D_2)$ e $(f_2, D_2) \sim (f_3, D_3)$ allora

$$(f_1, D_1) \sim (f_3, D_3).$$

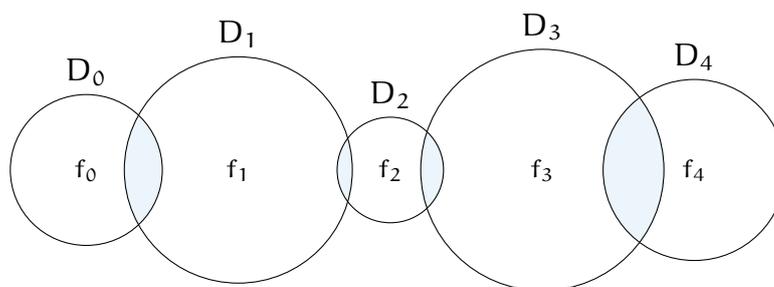
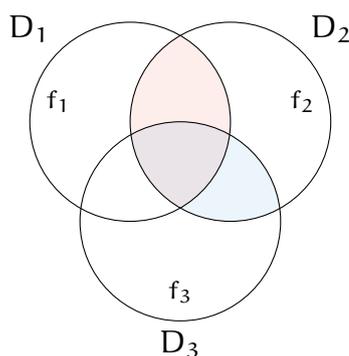


Figura 8.2: Catena analitica.

Dimostrazione. Consideriamo la seguente figura:



dove per ipotesi $f_1 \equiv f_2$ in $D_1 \cap D_2$
 $f_2 \equiv f_3$ in $D_2 \cap D_3$

In particolare avremo $f_1 \equiv f_3$ in $D_1 \cap D_2 \cap D_3$. Quindi

$$f_1 \equiv f_3 \quad \text{in } D_1 \cap D_3$$

per il principio di identità. Da cui

$$(f_1, D_1) \sim (f_3, D_3).$$

□

8.3 PROLUNGAMENTO ANALITICO LUNGO UNA CURVA

Definizione 8.8 – Catena che copre una curva

Siano (D_0, \dots, D_n) una catena e $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva. Diciamo che (D_0, \dots, D_n) copre γ se esistono $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ tali che

- $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$ sono i rispettivi centri di D_0 e D_n ;
- $\gamma[s_i, s_{i+1}] \subseteq D_i$ per ogni $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Definizione 8.9 – Continuazione lungo una curva

Si dice che (f_n, D_n) è una *continuazione* di (f_0, D_0) lungo la curva $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ se

- (D_0, \dots, D_n) è una catena che copre γ ;
- (f_n, D_n) è il prolungamento di (f_0, D_0) lungo la catena (D_0, \dots, D_n) .

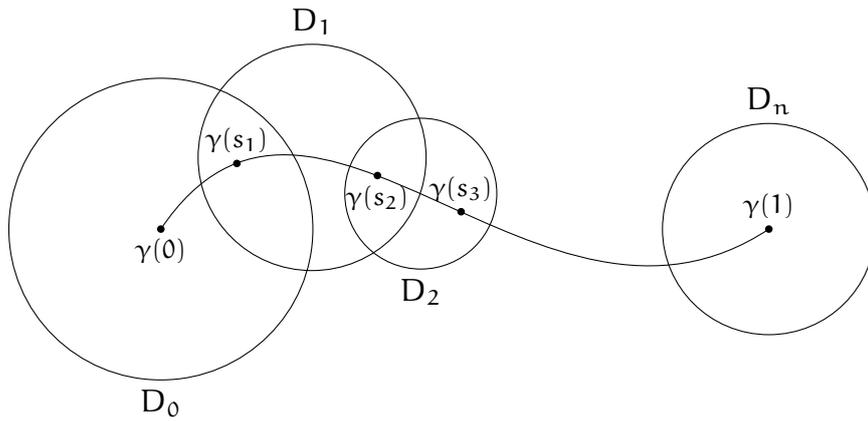


Figura 8.3: Catena che copre una curva.

Teorema 8.10 – Unicit  del prolungamento analitico lungo una curva

Supponiamo che $\{(f_0, A_0), \dots, (f_n, A_n)\}$ e $\{(g_0, B_0), \dots, (g_m, B_m)\}$ siano due prolungamenti di f_0 lungo la curva $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$. Allora

$$f_n \equiv g_m \quad \text{in } A_n \cap B_m.$$

Dimostrazione. Prendiamo $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ la partizione per $\{A_0, \dots, A_n\}$ e $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ la partizione per $\{B_0, \dots, B_m\}$. La strategia   dimostrare che

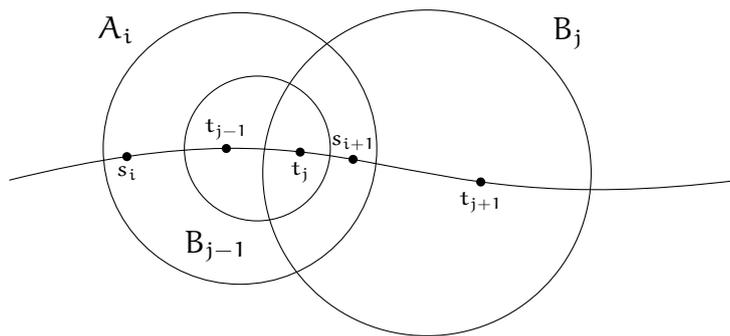
$$[s_i, s_{i+1}] \cap [t_j, t_{j+1}] \neq \emptyset \implies (f_i, A_i) \sim (g_j, B_j). \quad (\star)$$

Ci  implicherebbe la tesi, poich  chiaramente $[s_{n-1}, 1] \cap [t_{m-1}, 1] \neq \emptyset$, da cui

$$(f_n, A_n) \sim (g_m, B_m).$$

Supponiamo per assurdo che (\star) sia falso. Dal momento che in $[0, s_1] \cap [0, t_1]$   vero per ipotesi, devono esistere i, j tali che (\star)   falso e $i + j$   minimo:

sono infatti entrambe estensioni di f_0



Per $i, j - 1$ l'asserto   vero poich  sono inferiori al minimo, quindi

$$(f_i, A_i) \sim (g_{j-1}, B_{j-1}).$$

Inoltre $(g_{j-1}, B_{j-1}) \sim (g_j, B_j)$ per ipotesi. Quindi per la transitivit  dimostrata nella teorema 8.7, avremo

$$(f_i, A_i) \sim (g_j, B_j).$$

Ma ci    assurdo in quanto i, j sono i pi  piccoli indici per cui ci  non accade. □

Osservazione. Il teorema in particolare afferma che il prolungamento lungo una curva è un'estensione canonica.

Definizione 8.11 – Curve omotope

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Due curve $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow \Omega$ che coincidono agli estremi si dicono *omotope* se esiste una mappa continua $\varphi: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ tale che

- $\varphi(s, 0) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ e $\varphi(s, 1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ per ogni $s \in [0, 1]$.
- $\varphi(0, t) = \gamma_0(t)$ e $\varphi(1, t) = \gamma_1(t)$ per ogni $t \in [0, 1]$.

Osservazione. L'insieme delle curve omotope costituisce una classe di equivalenza.

Teorema 8.12 – Indipendenza del prolungamento per classi di omotopia

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto e sia $(B(z_0; r), f)$ un elemento analitico in Ω che si può prolungare lungo ogni curva di Ω . Se γ_0, γ_1 sono due curve omotope con

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = z_0 \in \Omega \quad \text{e} \quad \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z \in \Omega,$$

allora il prolungamento analitico lungo γ_0 coincide con il prolungamento analitico lungo γ_1 .

Dimostrazione. Per ipotesi γ_0, γ_1 sono omotope, trovo quindi l'omotopia $\varphi(s, t)$. In particolare

$$\varphi(0, t) = \gamma_0(t) \quad \text{e} \quad \varphi(1, t) = \gamma_1(t).$$

Fissato $s \in [0, 1]$ definisco $\gamma_s(t) = \varphi(s, t)$. Prolunghiamo $(B(z_0; r), f)$ lungo γ_0 , per il teorema precedente, il prolungamento dipende solo da γ_0 . Chiamiamo $(D_0, f_0), \dots, (D_n, f_n)$ gli elementi analitici del prolungamento. Per continuità e compattezza

$$\gamma_s([0, 1]) \subseteq \bigcup_{i=0}^n D_i \quad \text{se } s \in [0, \varepsilon]$$

con ε sufficientemente piccolo. Quindi $(D_0, f_0), \dots, (D_n, f_n)$ è un prolungamento analitico anche per γ_s per $s \in [0, \varepsilon]$. D'altronde abbiamo già osservato come il prolungamento analitico sia unico e dipenda solo dalla curva, pertanto il prolungamento di f lungo γ_0 o lungo $\gamma_s, s \in [0, \varepsilon]$, è lo stesso. Abbiamo quindi mostrato che il prolungamento analitico è localmente costante in s . Dal momento che $[0, 1]$ è connesso, il prolungamento analitico non dipende da s . In particolare se prolungo (D_0, f_0) lungo γ_0 o lungo γ_1 , ottengo lo stesso risultato. \square

si veda la
figura 8.3 per
comprendere
l'affermazione

Osservazione. Il prolungamento analitico dipende quindi solo dalla classe di omotopia. In particolare, negli aperti semplicemente connessi dove vi è una sola classe di omotopia, il prolungamento analitico non dipende dalla particolare curva.

Corollario. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ semplicemente connesso. Sia $D \subseteq \Omega$ un disco e sia (D, f) un elemento analitico che si può prolungare lungo tutte le curve di Ω . Allora esiste $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa tale che $f(z) = g(z)$, $\forall z \in D$.

Dimostrazione. Definiamo $g(z)$ nel seguente modo: supponiamo che z_0 sia il centro di D , prendiamo una curva γ che connette z_0 e z . In un intorno di z definisco $g(w)$ come l'estensione di (D, f) lungo γ . Poiché Ω è semplicemente connesso, l'estensione non dipende dalla scelta della curva γ . Per cui se estendo lungo $\tilde{\gamma}$, quest'ultima è omotopa a γ e per il teorema precedente ottengo la stessa estensione. \square

Proposizione 8.13 – Determinazione della radice

Se $\Omega \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ è un aperto semplicemente connesso, in Ω posso definire una determinazione della radice.

Dimostrazione. Sia $z_0 \in \Omega$, voglio definire la radice in $B(z_0; r)$ per r piccolo. Sfruttiamo il teorema della funzione inversa: considero $w_0 \neq w_1$ tali che $w_0^2 = z_0 = w_1^2$. Posto $f(z) = z^2$, so che

$$f'(w_0) \neq 0 \neq f'(w_1).$$

Posso quindi applicare la funzione inversa per trovare

$$g_0: B(z_0; r) \rightarrow \mathcal{U}_{w_0} \quad \text{e} \quad g_1: B(z_0; r) \rightarrow \mathcal{U}_{w_1}$$

olomorfe tali che

$$g_0 \circ f(w) = w, \forall w \in \mathcal{U}_{w_0} \quad \text{e} \quad g_1 \circ f(w) = w, \forall w \in \mathcal{U}_{w_1}.$$

Arbitrariamente, scegliamo g_0 come determinazione per la radice su $B(z_0; r)$. Ora, preso $z \in \Omega$, devo poter dare la medesima determinazione. Posso estendere (D_0, g_0) lungo ogni curva γ , dove $D_0 = B(z_0; r)$ con $r = |z_0|$. Dal momento che γ è compatto, il minimo raggio di $B(\gamma(t), r)$ è strettamente positivo. Quindi giungo in z dopo un numero finito di passi. Sono soddisfatte entrambe le ipotesi del corollario, il quale applicato, ci fornisce la tesi. \square

il disco di convergenza è infatti il più grande possibile e in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ coincide proprio con $|z_0|$

Notazione. Questo risultato prende anche il nome di *teorema di monodromia*.

Osservazione. Analogamente è possibile definire su Ω una determinazione del logaritmo.

Osservazione. Se Ω non è semplicemente connesso, partiamo dall'elemento analitico $(B(z_0, r), f)$. Sia γ una curva che connette z_0 e z . In tal caso $f(z)$ dipende da z e dalla classe di omotopia $[\gamma]$.

Quindi se Ω non è semplicemente connesso e (D, f) è un elemento analitico in Ω che si può estendere lungo ogni curva, posso non essere in grado di estendere f a tutto Ω (come ad esempio il logaritmo su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$). D'altronde è sempre possibile estendere f a un rivestimento di Ω .

Esempio (Logaritmo). Sia (S, π) il rivestimento universale di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Se definiamo

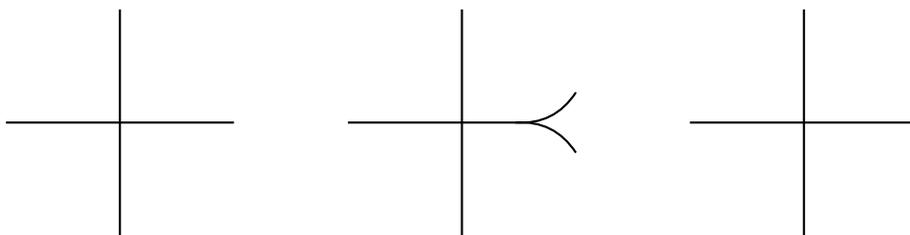


Figura 8.4: Determinazione del logaritmo sul rivestimento universale di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. DA FINIRE!!

$\ln: S \rightarrow \mathbb{C}$, il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 & S & \\
 \ln \swarrow & & \searrow \pi \\
 \mathbb{C} & \xrightarrow{e^z} & \mathbb{C} \setminus \{0\}
 \end{array}$$

commuta. Nella figura 8.4 possiamo vederne una rappresentazione grafica.

9 | TEOREMA DELLA MAPPA DI RIEMANN

9.1 COMPATTEZZA NELLO SPAZIO DELLE FUNZIONI OLOMORFE

Definizione 9.1 – Famiglia di funzioni normale

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $F \subseteq H(\Omega)$. Diciamo che F è una *famiglia normale* se per ogni successione di funzioni $\{f_n\}_{n \geq 1} \subseteq F$, trovo una sottosuccessione $\{f_{n_h}\}_{h \geq 1}$ e $f \in H(\Omega)$ tali che

$$f_{n_h} \rightarrow f \quad \text{quasi uniformemente.}$$

Osservazione. Non chiedendo che $f \in F$, non abbiamo trovato una reale definizione di compattezza, ma, piuttosto, una di relativa compattezza. Ricordiamo infatti che un insieme si dice relativamente compatto se la sua chiusura è compatta.

Teorema 9.2 – di Ascoli-Arzelà

Sia $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un compatto e sia $\{f_n\}_{n \geq 1} \subseteq C(K, \mathbb{R})$ una successione di funzioni tale che

1. $\sup_{\substack{z \in K \\ n \in \mathbb{N}}} |f_n(z)| < +\infty.$

2. Esiste $L > 0$ tale che

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| \leq L|z_1 - z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in K \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_h}\}_{h \geq 1}$ che converge a una funzione f uniformemente su K .

| *Dimostrazione.* Risultato di Analisi II. □

Osservazione. L'ipotesi (1) da sola non è sufficiente. $\sin \frac{1}{x^n}$ è un esempio di funzione limitata che non converge a una funzione continua

Teorema 9.3 – Caratterizzazione delle famiglie normali

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto e sia $F \subseteq H(\Omega)$. F è normale se e soltanto se per ogni $K \subseteq \Omega$ compatto, esiste $M > 0$ tale che

$$|f_n(z)| \leq M, \quad \forall n \geq 1 \quad \forall z \in K.$$

⇒) *Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che F non sia equilimitata sui compatti di Ω . Possiamo quindi trovare $K \subseteq \Omega$ tale che

$$\sup_{z \in K} |f_n(z)| \geq n.$$

Per ipotesi F è normale, quindi posso estrarre una sottosuccessione $\{f_{n_h}\}$ di $\{f_n\}$ che converge a f uniformemente sui compatti di Ω . In particolare

$$\sup_{z \in K} |f_{n_h}(z) - f(z)| \rightarrow 0 \quad \text{per } h \rightarrow +\infty.$$

Ora, per Weierstrass, f è limitato su K , quindi esiste $M > 0$ tale che

$$\sup_{z \in K} |f(z)| \leq M.$$

Da cui

$$n_h \leq \sup_{z \in K} |f_{n_h}(z)| \leq \sup_{z \in K} |f_{n_h}(z) - f(z)| + M.$$

che implica

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} n_h \leq M$$

che è assurdo.

⇐) Sia $K \subseteq \Omega$ compatto. Per compattezza posso ricoprire K con un numero finito di palle

$$\{B(z_i; r_i)\}_{i=1}^l \quad \text{con } \overline{B(z_i; r_i)} \subseteq \Omega.$$

Per dimostrare che F è normale è quindi sufficiente dimostrare che $\{f_n\}$ è compatto in ogni palla $B(z_0; r)$ con $\overline{B(z_0; r)} \subseteq \Omega$. Seguirebbe infatti che è possibile estrarre $\{f_{n_n}\}$ che converge su $\overline{B(z_1; r_1)}$. Inoltre, dal momento che le $B(z_i; r_i)$ sono finite, posso iterare: da $\{f_{n_n}\}$ estraggo quindi $\{f_{n_{n_i}}\}$ che converge anche su $\overline{B(z_2; r_2)}$ e così fino ad estrarre una sottosuccessione $\{f_{n_s}\}$ che converge su tutte le palle. In particolare essa convergerebbe su K in quanto

$$\bigcup_{i=1}^l B(z_i; r_i) \supseteq K.$$

Sia $B(z_0; r)$ tale che $\overline{B(z_0; r)} \subseteq \Omega$ e sia $\{f_n\} \subseteq F$. Sfruttiamo Ascoli-Arzelà per dimostrare che $\{f_n\}$ è compatto su $B(z_0; r)$. Per ipotesi

$$|f_n(z)| \leq M, \quad \forall n \geq 1 \quad \forall z \in \overline{B(z_0; r)}$$

che è la prima ipotesi di Ascoli-Arzelà. Grazie al teorema di Lagrange, per mostrare la seconda, è sufficiente verificare che

$$|f'_n(z)| \leq M', \quad \forall n \geq 1 \quad \forall z \in \overline{B(z_0; r)}.$$

Sfruttiamo la formula integrale di Cauchy: prendiamo $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{B(z_0; r + \varepsilon)} \subseteq \Omega$. In particolare avremo ancora

$$|f_n(z)| \leq M'', \quad \forall n \geq 1 \quad \forall z \in \overline{B(z_0; r + \varepsilon)} \subseteq \Omega.$$

Da cui

$$\begin{aligned} |f'_n(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0; r+\varepsilon)} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2} dw \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f_n(z_0 + (r+\varepsilon)e^{it})}{[(z_0 + (r+\varepsilon)e^{it}) - z]^2} (r+\varepsilon)i e^{it} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M''}{\varepsilon^2} (r+\varepsilon) dt = \frac{M''}{\varepsilon^2} (r+\varepsilon) \quad \forall z \in \overline{B(z_0; r)}. \end{aligned}$$

□

abbiamo sfruttato
la
parametrizzazione
 $w =$
 $z_0 + (r + \varepsilon)e^{it}$ e
abbiamo osservato
che ε è la minima
distanza possibile
tra w e z

9.2 MAPPA DI RIEMANN

Teorema 9.4 – della mappa di Riemann

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto semplicemente connesso che non coincida con \mathbb{C} . Allora esiste $f: \Omega \rightarrow B(0; 1)$ biiettiva e biolomorfa. Inoltre, preso $z_0 \in \Omega$, si può imporre

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) \in \mathbb{R}, \quad f'(z_0) > 0.$$

f , con questa condizione, è unica.

Dimostrazione. Mostriamo l'esistenza di f . Consideriamo

$$F = \{ f: \Omega \rightarrow B(0; 1) \mid f \text{ olomorfa, iniettiva e } f(z_0) = 0 \}.$$

Vogliamo dimostrare che

1. F non è vuoto.
2. $\sup\{|f'(z_0)| : f \in F\}$ è un massimo.
3. Se $f_0 \in F$ è massimale rispetto a (2), allora f_0 è la funzione cercata.

Per ipotesi Ω è semplicemente connesso e $\Omega \neq \mathbb{C}$, quindi esiste $w_0 \notin \Omega$. Per cui la mappa $w \mapsto w - w_0$ a valori in Ω non si annulla mai. Per il teorema di monodromia possiamo definire 1)

$$\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \sqrt{z - w_0}.$$

φ è iniettiva, infatti

$$\varphi(z_1) = \varphi(z_2) \implies z_1 - w_0 = z_2 - w_0 \implies z_1 = z_2.$$

Inoltre $\varphi(z_1) \neq -\varphi(z_2)$ se $z_1 \neq z_2$, infatti

$$\varphi(z_1) = -\varphi(z_2) \implies \varphi(z_1)^2 = \varphi(z_2)^2 \implies z_1 - w_0 = z_2 - w_0 \implies z_1 = z_2.$$

Ciò significa che se φ assume il valore c , allora non assume il valore $-c$. Sappiamo che le mappe olomorfe sono aperte, quindi $\varphi(\Omega)$ è aperto. Ora se $B(a; r) \subseteq \varphi(\Omega)$, per quanto appena detto, avremo

$$-B(a; r) = B(-a; r) \subseteq \varphi(\Omega)^c.$$

Definiamo

$$\psi: \Omega \rightarrow B(0; 1), z \mapsto \frac{r}{\varphi(z) + a}.$$

Osserviamo che ψ è iniettiva in quanto φ lo è. Inoltre ψ è olomorfa poiché è l'inverso di una funzione olomorfa che non si annulla mai, infatti abbiamo dimostrato che $\varphi(z) \notin B(-a; r)$ per ogni $z \in \Omega$. Infine

$$\varphi(z) \notin B(-a; r) \implies |\varphi(z) + a| > r \implies \psi(\Omega) \subseteq B(0; 1).$$

Quindi, componendo ψ con un automorfismo del disco che manda $\varphi(z_0)$ in 0, ho trovato un elemento di F .

Sia $\alpha = \sup\{|f'(z_0)| : f \in F\}$. Se $f \in F$ per definizione $|f(z)| \leq 1$ per ogni $z \in \Omega$, quindi 2) F è una famiglia normale per la caratterizzazione di queste ultime. Dalla definizione di estremo superiore, trovo una successione massimizzante, ovvero

$$\{f_n\} \subseteq F \quad \text{tale che } |f'_n(z_0)| \geq \alpha - \frac{1}{n}.$$

D'altronde F è normale, quindi esiste una sottosuccessione $\{f_{n_n}\}$ che converge quasi uniformemente a f_0 su Ω . Vogliamo mostrare che

$$f_0 \in F \quad \text{e} \quad |f'_0(z_0)| = \alpha.$$

È chiaro che $f_0(\Omega) \subseteq B(0; 1)$, inoltre $f_0(z_0) = 0$ perché

$$0 = f_n(z_0) \longrightarrow f(z_0).$$

Infine f_0 è iniettivo perché, da un risultato precedente, il limite quasi uniforme di una successione di funzioni iniettive è iniettivo o costante; d'altronde f_0 non è costante perché, come dimostreremo tra poco, $|f'_0(z_0)| = \alpha$ e quindi

$$|f'_0(z_0)| > |\tilde{f}'(z_0)| \implies f_0 \neq 0$$

$|f'_0(z_0)| = \alpha$ perché se f_n converge quasi uniformemente a f_0 , come conseguenza della formula di Cauchy, anche f'_n converge quasi uniformemente a f'_0 .

- 3) È sufficiente mostrare che f_0 è suriettiva, così da ottenere la funzione biettiva e olomorfa, e di conseguenza biolomorfa, cercata. Supponiamo per assurdo che f_0 non sia suriettiva, mostriamo che questo ci permette di costruire una mappa $h \in F$ tale che $|h'(z_0)| > \alpha$ contro la massimalità di α . Indichiamo con φ_β la generica mappa di Möbius

$$\varphi_\beta: B(0; 1) \longrightarrow B(0; 1), z \longmapsto \frac{z - \beta}{1 - \bar{\beta}z}.$$

Sia $\gamma \in B(0; 1)$ tale che $\gamma \notin f_0(\Omega)$, componiamo f_0 con φ_γ così da avere

$$0 \notin \varphi_\gamma \circ f_0(\Omega).$$

Dal teorema di monodromia sugli aperti semplicemente connessi che escludono l'origine, si riesce a definire un ramo della radice. Sia quindi $s(z) = z^2$ e componiamo $\varphi_\gamma \circ f_0$ con s^{-1} chiamando la funzione ottenuta g . Componiamo infine con $\varphi_{g(z_0)}$, abbiamo quindi

$$h = \varphi_{g(z_0)} \circ s^{-1} \circ \varphi_\gamma \circ f_0.$$

Ora $h \in F$ come immediata conseguenza della sua definizione. Mostriamo che $|h'(z_0)| > \alpha$. Per costruzione

$$h(z) = \varphi_{g(z_0)} \circ s^{-1} \circ \varphi_\gamma \circ f_0(z) \implies f_0(z) = \underbrace{\varphi_\gamma^{-1} \circ s \circ \varphi_{g(z_0)}^{-1}}_G \circ h(z),$$

da cui, dal momento che $h(z_0) = 0$,

$$0 = f_0(z_0) = G \circ h(z_0) \implies F(0) = 0.$$

Inoltre G porta $B(0; 1)$ in sé, quindi, per il lemma di Schwarz, $|G'(0)| \leq 1$. D'altronde G non è una rotazione, quindi $|G'(0)| \neq 1$. Infine, per la regola della catena,

$$|f'_0(z_0)| = |G'(0)| |h'(z_0)| \implies |h'(z_0)| > |f'_0(z_0)|,$$

che è assurdo.

Mostriamo l'unicità. Siano $f, g: \Omega \rightarrow B(0; 1)$ due mappe biettive e biolomorfe che soddisfano la condizione di z_0 . Dimostriamo che $f \equiv g$. Sappiamo che tali mappe sono invertibili. Consideriamo g^{-1} e definiamo

$$h(z): B(0; 1) \longrightarrow B(0; 1), z \longmapsto f \circ g^{-1}(z).$$

h è ancora biettiva e biolomorfa, quindi $h \in \text{Aut}(B(0; 1))$. Inoltre $h(0) = 0$, quindi dalla caratterizzazione degli automorfismi del disco e dal lemma di Schwarz, segue

$$h(z) = e^{i\vartheta} z.$$

Ora $g', f' \in \mathbb{R}^+$, da cui

$$e^{i\vartheta} = h'(0) = f'|_{g^{-1}(0)}(g^{-1})'(0) = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} \in \mathbb{R}^+ \implies \vartheta = 0 \implies h(z) = z.$$

Quindi

$$f \circ g^{-1}(z) = z \iff f(z) = g(z), \forall z \in \Omega.$$

□

Osservazione. È sempre possibile imporre la condizione di unicità. Infatti trovata f è sufficiente comporla prima con l'automorfismo del disco che manda $f(z_0)$ in 0:

$$z \mapsto \frac{z - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}z};$$

e infine comporre con la rotazione

$$z \mapsto z \frac{\overline{g'(z_0)}}{|g'(z_0)|},$$

dove g è f composto con l'automorfismo.

Osservazione. L'ipotesi di $\Omega \neq \mathbb{C}$ è necessaria in quanto, per il teorema di Liouville, una mappa olomorfa $f: \mathbb{C} \rightarrow B(0; 1)$ è costante.

Teorema 9.5 – di Picard

Sia $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione intera. Se f evita almeno due valori, cioè

$$f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\},$$

allora f è costante.

Dimostrazione. Sia f una funzione intera che evita z_1, z_2 . Non è restrittivo pensare $z_1 = 0$ e $z_2 = 1$, è infatti sufficiente applicare una rotodilatazione adeguata. Se dimostriamo che $B(0; 1)$ è il ricoprimento universale di $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, per un teorema di Topologia sui sollevamenti, troviamo una mappa olomorfa g che fa commutare il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} & & B(0; 1) \\ & \nearrow g & \downarrow \pi \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \end{array}$$

Per Liouville g risulterà costante e pertanto lo sarebbe anche $f = \pi \circ g$. Mostriamo che $B(0; 1)$ copre $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Chiamo S^\pm i semipiani inferiore e superiore. Prendiamo un triangolo equilatero su $B(0; 1)$ e denotiamo l'insieme dei punti che contiene con D_0 . Per la mappa di Riemann, trovo

$$\varphi: D_0 \longrightarrow S^+$$

continua fino al bordo e tale che

$$\varphi(1) = 0, \quad \varphi(e^{i \frac{2\pi}{3}}) = 1, \quad \varphi(e^{i \frac{4\pi}{3}}) = \infty.$$

Siano a, b, c i tre archi che delimitano D_0 . Sia R l'inversione circolare rispetto ad a in $B(0; 1)$. Tramite R la circonferenza unitaria è portata in una circonferenza ortogonale ad a che passa per 1 e $e^{i \frac{2\pi}{3}}$, che è pertanto ancora $B(0; 1)$. Su $R(D_0)$ definiamo

$$\tilde{\varphi}: R(D_0) \longrightarrow S^-, z \mapsto \overline{\varphi(Rz)}.$$

Per il principio di riflessione di Schwarz la mappa

$$\tilde{\varphi}: D_0 \cup R(D_0) \longrightarrow \mathbb{C}$$

è olomorfa. Iterando per tutti i lati infinite volte si ottiene il ricoprimento. □

Notazione. Spesso si fa riferimento a questo teorema come al *piccolo teorema di Picard*.

Osservazione. Il teorema non può essere rifinito ulteriormente, vi sono infatti funzioni intere che evitano un solo valore ma non sono costanti. Ad esempio e^z ha immagine $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

INDICE ANALITICO

- Catena analitica, 85
 - che copre una curva, 86
- Catene, 33
- Cicli, 33
- Continuazione Diretta, 85
- Continuazione diretta
 - lungo una curva, 86
- Convergenza
 - quasi uniforme, 31

- Disco aperto, 4
- Distanza iperbolica, 65

- Elemento analitico, 85
- Equazioni di Cauchy-Riemann, 5

- Famiglia normale, 91
- Formula
 - integrale di Cauchy, 22
 - inversione di Lagrange, 54
- Funzione
 - armonica, 71
 - differenziabile, 4
 - intera, 5
 - meromorfa, 42
 - olomorfa, 5

- Indice di avvolgimento, 15
- Insieme coniugato, 77
- Integrale
 - di una funzione lungo una curva, 14
- Integrale di Poisson, 75

- Lemma di Schwarz, 61
- Lunghezza curva, 16
- Lunghezza iperbolica, 65

- Mappa di Möbius, 62

- Polo, 39
 - all'infinito, 41
- Principio del massimo, 29
 - per funzioni armoniche, 73
- Principio di identità, 30
- Principio di riflessione di Schwarz, 79
- Prolungamento analitico, 85
- Proprietà del valor medio, 28
 - per funzioni armoniche, 77
- Punto regolare, 83

- Residuo, 44

- Serie di Laurent, 34
 - convergenza, 35
- Sfera di Riemann, 9
- Singularità
 - eliminabile, 38
 - essenziale, 40
 - essenziale all'infinito, 42
 - isolata, 38

- Teorema
 - del birapporto, 12
 - dell'indicatore logaritmico, 46
 - della mappa di Riemann, 93
 - della singolarità eliminabile, 38
 - delle funzioni analitiche, 24
 - di Casorati-Weierstrass, 41
 - di Liouville, 26
 - di Morera, 28
 - di Picard, 95
 - di Rouchè, 47
- Teorema dei residui, 44
 - generalizzato, 45
- Teorema di Cauchy
 - generalizzato, 34
 - per i dischi aperti, 20
 - per i rettangoli, 18
- Trasformazione lineare fratta, 10