



Università degli Studi di Roma Tre

FACOLTÀ DI MATEMATICA

APPUNTI INTEGRATIVI

Meccanica Analitica

FM210

Di:
Edoardo Signorini

INDICE

I	Introduzione	4
1	LE EQUAZIONI DELLA MECCANICA E LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA	5
1.1	Equazioni di Newton	5
1.2	Forze conservative e indipendenti dal tempo	5
1.3	Conservazione dell'energia meccanica	8
2	ANALISI QUALITATIVA DEL MOTO E STABILITÀ	10
2.1	Introduzione	10
2.2	Sistemi con attrito	14
2.3	Piccole oscillazioni	15
2.4	Esercizi	17
II	Analisi qualitativa del moto	18
3	SISTEMI CONSERVATIVI UNIDIMENSIONALI	19
3.1	Pendolo matematico	19
3.1.1	Piano delle fasi	21
3.1.2	Soluzioni analitiche	23
3.2	Moto unidimensionale generico	26
4	MOTI IN CAMPO CENTRALE	28
4.1	Introduzione	28
4.2	Riconducibilità al caso di singola particella	29
4.3	Conservazione dell'energia meccanica	30
4.4	Potenziale radiale	30
4.5	Conservazione del momento angolare	31
4.5.1	Caso banale	32
4.6	Riduzione dimensionale	32
4.7	Potenziale efficace	33
4.8	Moto complessivo	34
4.8.1	Traiettoria banale	35
4.8.2	Traiettoria chiusa non singolare	35
5	MOTI IN CAMPO GRAVITAZIONALE E LEGGI DI KEPLERO	36
5.1	Introduzione	36
5.2	Soluzione del moto	36
5.3	Moto complessivo	40
5.4	Leggi di Keplero	42
III	Meccanica Lagrangiana	44
6	CALCOLO DELLE VARIAZIONI E INTRODUZIONE ALLA MECCANICA LAGRANGIANA	45
6.1	Spazio dei moti	45
6.2	Equazioni di Eulero-Lagrange	48
6.3	Principio di minima azione	50
6.4	Invarianza del principio di stazionarietà	52
7	MOTI VINCOLATI	54

7.1	Introduzione	54	
7.2	Vincoli ideali	55	
7.3	Sistemi di punti materiali sottoposti a sistemi di vincoli ideali		58
7.4	Considerazione per casi dipendenti dal tempo	59	
8	ALTRE GRANDEZZE CONSERVATE	64	
8.1	Variabili cicliche	64	
8.2	Teorema di Nöther	67	
IV	Cambiamenti di sistemi di riferimento e corpo rigido		70
9	CAMBIAMENTI DI SISTEMI DI RIFERIMENTO	71	
9.1	Legge di trasformazione della posizione	71	
9.2	Legge di trasformazione della velocità	72	
9.3	Legge di trasformazione delle forze	74	
10	CORPO RIGIDO	76	
10.1	Introduzione	76	
10.2	Energia cinetica	77	
10.3	Quantità di moto	79	
10.4	Momento angolare	79	
10.5	Dinamica del corpo rigido	80	
V	Meccanica Hamiltoniana		85
11	FORMALISMO HAMILTONIANO	86	
11.1	Introduzione	86	
11.2	Equazioni di Hamilton e teorema di Liouville	88	
11.3	Parentesi di Poisson	91	
12	CALCOLO DELLE VARIAZIONI E TRASFORMAZIONI CANONICHE		94
12.1	Principio di variazione di Hamilton	94	
12.2	Trasformazioni canoniche e funzioni generatrici	97	
12.3	Equazione di Hamilton-Jacobi	100	
12.4	Caratterizzazione delle trasformazioni canoniche	103	
	Indice analitico	106	

Parte I

Introduzione

1 | LE EQUAZIONI DELLA MECCANICA E LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

1.1 EQUAZIONI DI NEWTON

In questo corso studieremo le equazioni del moto classiche nei casi non relativistici. L'espressione alla base dei principali problemi che affronteremo è data dalla seconda legge della meccanica:

$$\underline{F} = m \underline{a} = m \underline{\ddot{x}}(t).$$

Idealmente, vorremmo essere in grado di risolvere un problema costituito da N masse puntiformi in \mathbb{R}^3 . Se indichiamo le masse con m_1, \dots, m_N e le coordinate con $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N \in \mathbb{R}^3$, dove assumiamo la dipendenza dal tempo $\underline{x} = \underline{x}(t)$, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\underline{x}}_1 = \underline{F}_1(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N, \dot{\underline{x}}_1, \dots, \dot{\underline{x}}_N, t) \\ \vdots \\ m_N \ddot{\underline{x}}_N = \underline{F}_N(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N, \dot{\underline{x}}_1, \dots, \dot{\underline{x}}_N, t) \end{cases}$$

Questo problema risulta fin troppo generale. Tipicamente l'espressione della forza sarà data dalla sovrapposizione di una forza esterna, di quelle interne ed eventualmente di un attrito. Avremo quindi:

$$\underline{F}_i(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N, \dot{\underline{x}}_1, \dots, \dot{\underline{x}}_N, t) = \underline{\varphi}_i(\underline{x}_i, t) + \sum_{j \neq i} \underline{f}_{ij}(\underline{x}_i - \underline{x}_j) - \gamma \dot{\underline{x}}_i.$$

Osserviamo che per $N \geq 3$, anche per espressioni semplici di $\underline{\varphi}$ e \underline{f} , questi sistemi non sono risolvibili, né esplicitamente né qualitativamente.

In questo corso studieremo alcuni casi particolari del problema generale con una struttura particolarmente semplice ($N = 1, 2$). In questi casi saremo in grado di scrivere la soluzione in forma esplicita. Introdurremo, inoltre, metodi analitici di trattazione della meccanica; i quali sono alla base di ulteriori sviluppi che permettono di trattare i casi non risolvibili.

Notazione. I casi in cui è possibile esibire una soluzione esplicita si dicono *integrabili*.

1.2 FORZE CONSERVATIVE E INDIPENDENTI DAL TEMPO

Nel caso di forze posizionali e indipendenti dal tempo, il problema generale diventa:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\underline{x}}_1 = \underline{F}_1(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N) \\ \vdots \\ m_N \ddot{\underline{x}}_N = \underline{F}_N(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N) \end{cases}$$

Ricordiamo che una forza si dice *conservativa* se esiste una funzione scalare

$$U: \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R},$$

Esempio (Oscillatore armonico). Prendiamo $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ e consideriamo un oscillatore armonico, governato dalla legge

$$m \ddot{\underline{x}} = -k \underline{x}.$$

L'espressione della forza è quindi dato da $\underline{F}(\underline{x}) = -k \underline{x}$. Il dominio è semplicemente connesso, quindi possiamo dimostrare che \underline{F} è conservativa verificando che è chiusa:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = -k \delta_{i,j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}.$$

Quindi \underline{F} è conservativa. In questo caso l'espressione di U è semplice da ottenere ed è data da

$$U(\underline{x}) = \frac{1}{2} k \underline{x}^2 \implies -\frac{\partial}{\partial \underline{x}} U(\underline{x}) = -k \underline{x}.$$

Esempio (Forza gravitazionale). Prendiamo $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ e consideriamo l'espressione della forza gravitazionale:

$$\underline{F}(\underline{x}) = -\frac{G M m}{|\underline{x}|^2} \hat{\underline{x}} = -\frac{G M m}{|\underline{x}|^3} \underline{x} \implies F_i = -G M m \frac{x_i}{|\underline{x}|^3}$$

$$\hat{\underline{x}} = \underline{x}/|\underline{x}|$$

Verifichiamo che \underline{F} sia chiusa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} &= -G M m \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_i}{|\underline{x}|^3} \right) = -G M m \left(\frac{\delta_{i,j} |\underline{x}|^3 - x_i \partial_{x_j} |\underline{x}|^3}{|\underline{x}|^6} \right) \\ &= -G M m \left(\frac{\delta_{i,j}}{|\underline{x}|^3} - \frac{3x_i}{|\underline{x}|^4} \frac{\partial |\underline{x}|}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

Ora

$$\frac{\partial |\underline{x}|}{\partial x_j} = \frac{\partial \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{\partial x_j} = \frac{2x_j}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_j}{|\underline{x}|} = \hat{x}_j.$$

Da cui

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = -G M m \left(\frac{\delta_{i,j}}{|\underline{x}|^3} - \frac{3x_i x_j}{|\underline{x}|^5} \right) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}.$$

Quindi \underline{F} è conservativo.

Esempio (Forza non conservativa). Prendiamo $\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ con $\underline{x} = (x, y)$ e consideriamo la seguente forza:

$$\underline{F}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -\alpha \frac{y}{x^2 + y^2} \\ \alpha \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che tale forza risulta chiusa, infatti:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\alpha \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\alpha \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

e

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = -\alpha \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

D'altronde, non essendo $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ semplicemente connesso, ciò non implica che \underline{F} sia conservativa. Mostriamo che non lo è esibendo una curva chiusa su cui otteniamo un

integrale non nullo di F . Consideriamo la seguente curva non riducibile:

$$\underline{\gamma}(t): [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Da cui

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} F \cdot d\underline{x} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\alpha \sin t \\ \alpha \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (\alpha \sin^2 t + \alpha \cos^2 t) dt \\ &= \alpha \int_0^{2\pi} dt = \alpha 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

1.3 CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

Definizione 1.3 – Energia meccanica

Definiamo l'*energia meccanica* H come la somma delle energie cinetiche e di quella potenziale:

$$H(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n, \dot{\underline{x}}_1, \dots, \dot{\underline{x}}_N) := \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\dot{\underline{x}}_i|^2 + U(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N).$$

Osservazione. In forma sintetica avremo

$$H(\underline{R}, \dot{\underline{R}}) = \frac{1}{2} \dot{\underline{R}} \cdot (M \dot{\underline{R}}) + U(\underline{R}).$$

Teorema 1.4 – Conservazione energia meccanica

L'energia meccanica H è una grandezza conservata per il sistema di equazioni $M \ddot{\underline{R}} = -\partial_{\underline{R}} U(\underline{R})$, ovvero

$$\frac{d}{dt} H(\underline{R}(t), \dot{\underline{R}}(t)) = 0$$

per ogni $\underline{R}(t)$ soluzione del sistema.

Dimostrazione. Supponiamo che $\underline{R}(t)$ sia soluzione del sistema e mostriamo esplicitamente che la derivata totale di H è nulla.

$$\frac{d}{dt} H(\underline{R}(t), \dot{\underline{R}}(t)) = \frac{\partial}{\partial \underline{R}} H(\underline{R}(t), \dot{\underline{R}}(t)) \cdot \dot{\underline{R}}(t) + \frac{\partial}{\partial \dot{\underline{R}}} H(\underline{R}(t), \dot{\underline{R}}(t)) \cdot \ddot{\underline{R}}(t).$$

Ora, per definizione di energia meccanica,

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{R}} = \frac{\partial U}{\partial \underline{R}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial \dot{\underline{R}}} = M \dot{\underline{R}}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(\underline{R}(t), \dot{\underline{R}}(t)) &= \frac{\partial}{\partial \underline{R}} U(\underline{R}(t)) \cdot \dot{\underline{R}}(t) + (M \dot{\underline{R}}(t)) \cdot \ddot{\underline{R}}(t) = \frac{\partial}{\partial \underline{R}} U(\underline{R}(t)) \cdot \dot{\underline{R}}(t) + \dot{\underline{R}}(t) \cdot (M \ddot{\underline{R}}(t)) \\ &= \dot{\underline{R}}(t) \cdot \left[M \ddot{\underline{R}}(t) + \frac{\partial}{\partial \underline{R}} U(\underline{R}(t)) \right] = 0 \end{aligned}$$

M è una matrice
simmetrica

in quanto $\underline{R}(t)$ è per ipotesi soluzione del sistema e si ha pertanto

$$M \ddot{\underline{R}}(t) = -\frac{\partial}{\partial \underline{R}} U(\underline{R}(t)). \quad \square$$

Notazione. Diremo anche che H è un *integrale primo* del nostro sistema, ovvero una funzione differenziabile con continuità che resta costante lungo le soluzioni del problema.

Osservazione. Se in un sistema vi sono un numero sufficiente di integrali primi, spesso è possibile risolvere esplicitamente il problema.

Concludiamo il capitolo con alcuni esempi banali ma comunque importanti. Per semplicità di notazione, adotteremo il seguente simbolismo per i dati iniziali:

$$\underline{R}_0 := \underline{R}(0) \quad \text{e} \quad \underline{V}_0 := \dot{\underline{R}}(0).$$

Esempio (Moto rettilineo uniforme). In assenza di forze il sistema è

$$M \ddot{\underline{R}} = \underline{0}.$$

In tal caso la soluzione è chiaramente

$$\underline{R}(t) = \underline{R}_0 + \underline{V}_0 t.$$

Esempio (Moto accelerato uniforme). Consideriamo un sistema in cui la forza \underline{F}_0 è costante e indipendente da \underline{R} :

$$M \ddot{\underline{R}} = \underline{F}_0.$$

Anche in questo caso la soluzione si ottiene banalmente

$$\underline{R}(t) = \underline{R}_0 + \underline{V}_0 t + \frac{1}{2} M^{-1} \underline{F}_0 t^2.$$

Esempio (Oscillatore armonico). Consideriamo l'equazione dell'oscillatore armonico

$$M \ddot{\underline{R}} = -k \underline{R}.$$

Le varie equazioni sono indipendenti dalle altre, per semplicità possiamo quindi considerare una singola componente:

$$M_{ii} \ddot{R}_i = -k R_i \implies \ddot{R}_i = -\frac{k}{M_{ii}} R_i = -\omega_i^2 R_i,$$

che è una equazione differenziale di facile risoluzione. Esplicitamente

$$R_i(t) = R_i(0) \cos(\omega_i t) + \frac{\dot{R}_i(t)}{\omega_i} \sin(\omega_i t).$$

2 | ANALISI QUALITATIVA DEL MOTO E STABILITÀ

Salvo precisazioni ulteriori, faremo riferimento a

$$M \ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} U(\mathbf{R}) \quad (*)$$

come al *sistema* o al sistema (*).

2.1 INTRODUZIONE

In generale, quando diciamo che $M \ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} U(\mathbf{R})$ è non risolubile, intendiamo che non lo è per dati iniziali generici. D'altronde è quasi sempre possibile identificare dati iniziali "speciali" che ci permettono di esplicitare una soluzione. In questi casi è inoltre possibile eseguire un'analisi qualitativa del problema negli intorni di tali punti.

Definizione 2.1 – Punto di equilibrio

Definiamo *punto di equilibrio* del sistema (*) un punto \mathbf{R}_{eq} tale che

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} U(\mathbf{R}_{eq}) = 0,$$

ovvero un punto critico del potenziale.

Osservazione. Spesso, la nozione di punto di equilibrio viene discusso per un sistema del tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{x}).$$

In tal caso si dice che \mathbf{x}_{eq} è un punto di equilibrio se $\mathbf{G}(\mathbf{x}_{eq}) = 0$.

Le equazioni di Newton sono un caso particolare di tale sistema, infatti le equazioni

$$M \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}) \iff \begin{cases} \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V} \\ \dot{\mathbf{V}} = M^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{R}, \mathbf{V}) \end{cases}$$

possono essere viste attraverso $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{x})$ ponendo

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix}$$

Esempio. Un caso particolare è quello in cui, posto un punto di equilibrio \mathbf{R}_{eq} , si hanno i seguenti dati iniziali:

$$\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_{eq} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{R}}(0) = \mathbf{0}.$$

In tal caso si ha che $\mathbf{R}(t) \equiv \mathbf{R}_{eq}$ è soluzione di (*).

Un approccio naturale, che andremo ad analizzare in questo capitolo, è quello di studiare il comportamento nel sistema, se scegliamo un punto vicino a quello di equilibrio come punto

iniziale. In particolare osserveremo che tale comportamento definisce punti di equilibrio "stabili" o "instabili"; a seconda di quanto dati iniziali vicini a \underline{R}_{eq} rimangono vicini ad esso.

Definizione 2.2 – Stabilità secondo Ljapunov

Un punto di equilibrio \underline{R}_{eq} si dice *stabile*, nel senso di Ljapunov, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tale che, se

$$\sqrt{|\underline{R}_0 - \underline{R}_{eq}|^2 + \tau_0^2 |\underline{V}_0|^2} \leq \delta,$$

allora

$$\sqrt{|\underline{R}(t) - \underline{R}_{eq}|^2 + \tau_0^2 |\underline{V}(t)|^2} \leq \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

Notaione. La quantità τ_0 si definisce *unità temporale* e serve ad aggiustare le unità di misura.

Osservazione. Viceversa \underline{R}_{eq} si dice *instabile* se non è stabile, cioè se esiste un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esistono $\underline{R}_0, \underline{V}_0$ e $t_1 > 0$ con

$$\sqrt{|\underline{R}_0 - \underline{R}_{eq}|^2 + \tau_0^2 |\underline{V}_0|^2} \leq \delta,$$

tali che

$$\sqrt{|\underline{R}(t_1) - \underline{R}_{eq}|^2 + \tau_0^2 |\underline{V}(t_1)|^2} > \varepsilon.$$

Teorema 2.3 – di Dirichlet

Sia \underline{R}_{eq} un punto di minimo locale stretto per $U(\underline{R})$. Allora \underline{R}_{eq} è stabile.

Dimostrazione. Per dimostrare che \underline{R}_{eq} è stabile, dobbiamo mostrare che per dati iniziali sufficientemente vicini a $(\underline{R}_{eq}, \underline{0})$, i valori $(\underline{R}, \dot{\underline{R}})$ continuano a restarvi vicini nel tempo. Consideriamo la seguente funzione

$$W(\underline{R}, \dot{\underline{R}}) = \frac{1}{2} \dot{\underline{R}} \cdot M \dot{\underline{R}} + U(\underline{R}) - U(\underline{R}_{eq})$$

osservando che $W(\underline{R}_{eq}, \underline{0}) = 0$. Dal momento che, per ipotesi, \underline{R}_{eq} un minimo stretto di U , sul bordo di un intorno di $(\underline{R}_{eq}, \underline{0})$, la quantità W sarà sempre positiva. Formalmente, definito

$$I_\varepsilon = \left\{ (\underline{R}, \dot{\underline{R}}) : \sqrt{|\underline{R} - \underline{R}_{eq}|^2 + \tau_0^2 |\dot{\underline{R}}|^2} \leq \varepsilon \right\}$$

avremo che, per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo,

$$E_\varepsilon := \min_{(\underline{R}, \dot{\underline{R}}) \in \partial I_\varepsilon} W(\underline{R}, \dot{\underline{R}}) > 0$$

Inoltre $W(\underline{R}, \dot{\underline{R}}) \rightarrow 0$ per $(\underline{R}, \dot{\underline{R}}) \rightarrow (\underline{R}_{eq}, \underline{0})$; in particolare esisterà un δ_ε tale che

$$\max_{(\underline{R}, \dot{\underline{R}}) \in I_{\delta_\varepsilon}} W(\underline{R}, \dot{\underline{R}}) \leq \frac{E_\varepsilon}{2}.$$

Quindi, dati iniziali in I_{δ_ε} , generano moti tali che

$$W(\underline{R}(t), \dot{\underline{R}}(t)) \leq \frac{E_\varepsilon}{2} \quad \text{se } (\underline{R}(t), \dot{\underline{R}}(t)) \in I_{\delta_\varepsilon}, \forall t \geq 0.$$

Ciò significa che $(\underline{R}, \dot{\underline{R}})$ non può raggiungere ∂I_ε su cui $W \geq E_\varepsilon$ e resteranno pertanto vicini al punto di equilibrio. \square

Osservazione. Ricordiamo che se \underline{R}_{eq} un punto critico per $U(\underline{R})$ e consideriamo la matrice Hessiana in \underline{R}_{eq}

$$(H_0)_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} U(\underline{R}_{eq}),$$

abbiamo le seguenti possibilità:

- Se H_0 è definita strettamente positiva, allora \underline{R}_{eq} è un minimo locale stretto di U .
- Se H_0 è definita strettamente negativa, allora \underline{R}_{eq} è un massimo locale stretto di U .
- Se H_0 ha autovalori positivi e negativi, allora \underline{R}_{eq} è un punto di sella di U .

Notazione. Con punto di sella non degenero, intendiamo che vi è un autovalore negativo dell'Hessiano di U in \underline{R}_{eq} .

Proposizione 2.4 – Condizione di instabilità

Sia \underline{R}_{eq} un punto di massimo locale o di sella non degenero per $U(\underline{R})$. Allora \underline{R}_{eq} è instabile.

Dimostrazione. Per semplicità discuteremo la dimostrazione per moti in una dimensione. L'equazione del moto a cui faremo riferimento sarà pertanto

$$m \ddot{x} = -U'(x).$$

Supponiamo che x_{eq} sia un massimo stretto non degenero, ovvero tale che

$$U'(x_{eq}) = 0 \quad \text{e} \quad U''(x_{eq}) < 0.$$

Sfruttando queste proprietà, sviluppiamo $-U'(x)$ in serie di Taylor attorno a x_{eq} :

$$-U'(x) = -U'(x_{eq}) - U''(x_{eq})(x - x_{eq}) + R(x, x_{eq}) = -U''(x_{eq})(x - x_{eq}) + R(x, x_{eq}),$$

dove $R(x, x_{eq}) \in \mathcal{O}((x - x_{eq})^2)$. In particolare $U''(x_{eq})$ è una costante negativa, scriviamola come

$$U''(x_{eq}) = -m \tau_0^{-2} \quad \text{con} \quad \tau_0 = \sqrt{\frac{m}{-U''(x_{eq})}}.$$

Sostituendo nell'equazione del moto otteniamo

$$m \ddot{x} = m \tau_0^{-2}(x - x_{eq}) + R(x, x_{eq}) \implies \ddot{x} = \tau_0^{-2}(x - x_{eq}) + \frac{R(x, x_{eq})}{m}. \quad (1)$$

Trascurando il resto, otteniamo l'equazione linearizzata

$$\ddot{x} = \tau_0^{-2}(x - x_{eq}),$$

la cui soluzione generale è

$$x(t) - x_{eq} = a e^{t/\tau_0} + b e^{-t/\tau_0}.$$

Il caso dei punti di sella non è applicabile

Imponendo i dati iniziali $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$, otteniamo

$$\begin{cases} x_0 - x_{eq} = a + b \\ \tau_0 v_0 = a - b \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{1}{2}(x_0 - x_{eq} + \tau_0 v_0) \\ b = \frac{1}{2}(x_0 - x_{eq} - \tau_0 v_0) \end{cases}$$

Quindi

$$x(t) - x_{eq} = \frac{1}{2}(x_0 - x_{eq} + \tau_0 v_0) e^{t/\tau_0} + \frac{1}{2}(x_0 - x_{eq} - \tau_0 v_0) e^{-t/\tau_0}.$$

Per dimostrare che x_{eq} è un punto instabile, vogliamo mostrare che esistono dati iniziali arbitrariamente vicini a $(x_{eq}, 0)$ che fuoriescono, in un tempo finito, da un intorno

$$I_{\delta_\varepsilon} = \left\{ (x, \dot{x}) : \sqrt{|x - x_{eq}|^2 + \tau_0^2 |\dot{x}|^2} \leq \delta_\varepsilon \right\}$$

Scegliamo i dati iniziali $(x_{eq} + \delta', 0)$ con $\delta' > 0$. Sulla base della soluzione generale ricavata prima, definiamo la seguente funzione

$$g(t) := x(t) - x_{eq} + \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\varepsilon}} \dot{x}(t).$$

Scriviamo la sua derivata e stimiamola in termini di g per riportarci ad una disequazione differenziale:

$$\frac{d}{dt} g(t) = \dot{x}(t) + \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\varepsilon}} \ddot{x}(t) = \dot{x}(t) + \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\varepsilon}} \left(\tau_0^{-2} (x - x_{eq}) + \frac{R(x, x_{eq})}{m} \right).$$

Possiamo stimare il resto con il termine di ordine inferiore:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon : |x - x_{eq}| \leq \delta_\varepsilon \implies \frac{|R(x, x_{eq})|}{m} \leq \varepsilon \tau_0^{-2} |x - x_{eq}|.$$

Quindi, fintanto che $|x - x_{eq}| \leq \delta_\varepsilon$ e ricordando che $x - x_{eq} > 0$, otteniamo che

$$\frac{d}{dt} g(t) \geq \dot{x} + \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\varepsilon}} \frac{1-\varepsilon}{\tau_0^2} (x - x_{eq}) = \frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\tau_0} \left(x - x_{eq} + \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\varepsilon}} \dot{x} \right),$$

ovvero

$$\frac{d}{dt} g(t) \geq \frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\tau_0} g(t).$$

Il lemma di Gronwall afferma che se esiste g che soddisfa tale disequazione differenziale, allora tale soluzione viene limitata dal basso dalla soluzione dell'equazione differenziale associata. Per trovare quest'ultima ricordiamo che g è positiva dall'istante iniziale, pertanto possiamo dividere per g e risolvere per separazione di variabili:

$$\begin{aligned} g'(t) = \frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\tau_0} g(t) &\implies \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\tau_0} \implies \frac{d}{dt} \ln(g(t)) = \frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\tau_0} \\ &\implies \ln(g(t)) = \frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\tau_0} t + \ln(g_0) \\ &\implies g(t) = g_0 e^{\frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\tau_0} t}. \end{aligned}$$

Da cui, applicando il lemma,

$$g(t) \geq g_0 e^{\frac{t\sqrt{1-\varepsilon}}{\tau_0}}.$$

Da questa stima, ricordando la definizione di g e la banale disuguaglianza $\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2} \geq a + b$, otteniamo

$$\sqrt{\frac{2}{1-\varepsilon}} \sqrt{|x(t) - x_{eq}|^2 + \tau_0^2 |\dot{x}(t)|^2} \geq x(t) - x_{eq} + \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\varepsilon}} \dot{x}(t) = g(t) \geq g_0 e^{\frac{t\sqrt{1-\varepsilon}}{\tau_0}},$$

che è certamente maggiore di ε per t sufficientemente grande. □

2.2 SISTEMI CON ATTRITO

Vorremmo ora considerare l'effetto dell'attrito sulla stabilità dei punti di equilibrio. L'equazione a cui facciamo riferimento in questo caso è

$$M \ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}}(\mathbf{R}) - \gamma \dot{\mathbf{R}}. \quad (**)$$

In particolare si dimostra che i punti di massimo o di sella non degeneri rimangono instabili come nel caso senza attrito; viceversa, i punti di minimo stretto non degeneri diventano asintoticamente stabili.

Definizione 2.5 – Punti asintoticamente stabili

Un punto di equilibrio \mathbf{R}_{eq} per un sistema dotato di attrito (**), si dice *asintoticamente stabile* se è stabile ed esiste δ per cui, dati iniziali in

$$I_\delta = \left\{ (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}) : \sqrt{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_{eq}|^2 + \tau_0^2 |\dot{\mathbf{R}}|^2} \leq \delta \right\},$$

generano moti tali che

$$(\mathbf{R}(t), \dot{\mathbf{R}}(t)) \longrightarrow (\mathbf{R}_{eq}, \mathbf{0}) \quad \text{per } t \rightarrow +\infty.$$

Teorema 2.6 – di Dirichlet per sistemi con attrito

Sia \mathbf{R}_{eq} un punto di minimo locale stretto non degenero per U . Allora \mathbf{R}_{eq} è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per

$$M \ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}}(\mathbf{R}) - \gamma \dot{\mathbf{R}} \quad \text{con } \gamma > 0.$$

Dimostrazione. Nuovamente per semplicità, discuteremo la dimostrazione per moti in una dimensione. L'equazione a cui faremo riferimento sarà pertanto

$$m \ddot{x} = -U'(x) - \gamma \dot{x}.$$

Supponiamo che x_{eq} sia un minimo stretto non degenero, per cui

$$U'(x_{eq}) = 0 \quad \text{e} \quad U''(x_{eq}) > 0.$$

$U''(x_{eq})$ è una costante positiva, quindi, analogamente alla dimostrazione precedente, definiamo

$$U''(x_{eq}) = \omega_0^2 m \quad \text{con } \omega_0 = \sqrt{\frac{U''(x_{eq})}{m}}.$$

Sviluppando $U'(x)$ con Taylor e sostituendo nell'equazione generale otteniamo

$$m \ddot{x} = -U''(x_{eq})(x - x_{eq}) + R(x, x_{eq}) - \gamma \dot{x} \implies \ddot{x} = -\omega_0^2(x - x_{eq}) - \frac{\gamma}{m} \dot{x} + \frac{R(x, x_{eq})}{m}.$$

Da cui otteniamo l'equazione linearizzata

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m} \dot{x} + \omega_0^2(x - x_{eq}) = 0,$$

che corrisponde all'equazione dell'oscillatore armonico smorzato.

Risolviendo esplicitamente l'equazione e stimandola in maniera opportuna, possiamo costruire una funzione che ci dia la tesi nel caso generale come per la proposizione sulla condizione di instabilità □

2.3 PICCOLE OSCILLAZIONI

Torniamo nel caso conservativo privo di attrito e andiamo a studiare con attenzione il caso del moto vicino ad un punto di equilibrio stabile.

Abbiamo dimostrato che $\underline{\mathbf{R}}_{eq}$ è un punto di equilibrio stabile se è un minimo stretto non degenerare per \mathbf{U} . Sviluppando \mathbf{U} nella sua serie di Taylor attorno a $\underline{\mathbf{R}}_{eq}$ e sostituendo nell'equazione del moto, otteniamo

$$M \ddot{\underline{\mathbf{R}}} = - \underbrace{\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \underline{\mathbf{R}}}(\underline{\mathbf{R}}_{eq})}_{=0} - H_0 (\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}_{eq}) + \underline{\mathbf{C}}(\underline{\mathbf{R}}, \underline{\mathbf{R}}_{eq}),$$

dove $\underline{\mathbf{C}}(\underline{\mathbf{R}}, \underline{\mathbf{R}}_{eq})$ è il resto di Taylor del secondo ordine.

Osservazione. Per definizione, $\underline{\mathbf{R}}_{eq}$ è non degenerare se la matrice Hessiana H_0 è definita positiva, ovvero se il minimo autovalore λ_{\min} di H_0 è strettamente positivo. Una definizione analoga è la seguente:

$$H_0 \geq \lambda_{\min} \text{Id} \quad \text{ovvero} \quad \underline{\mathbf{u}} \cdot H_0 \underline{\mathbf{u}} \geq \lambda_{\min} |\underline{\mathbf{u}}|^2.$$

Per Dirichlet, dati iniziali vicini a $\underline{\mathbf{R}}_{eq}$ stabile generano un moto che vi rimane vicino; ciò vuol dire che il resto di Taylor potrà sempre essere stimato tramite l'elemento del primo ordine a meno di un ε . Infatti

$$|\underline{\mathbf{C}}(\underline{\mathbf{R}}, \underline{\mathbf{R}}_{eq})| \leq K |\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}_{eq}|^2 \leq \varepsilon \lambda_{\min} |\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}_{eq}|$$

intanto che $|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}_{eq}|$ è abbastanza piccolo. D'altronde nel caso di $\underline{\mathbf{R}}_{eq}$ stabile, $|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}_{eq}|$ è piccolo ad ogni istante $t \geq 0$. Quindi l'equazione linearizzata

$$M \ddot{\underline{\mathbf{R}}} = -H_0 (\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}_{eq}), \quad (\star)$$

è vicina all'equazione iniziale in ogni istante $t \geq 0$.

Cerchiamo ora di risolvere l'equazione linearizzata. Definiamo

$$\underline{\mathbf{X}} = M^{\frac{1}{2}} (\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}_{eq}),$$

dove $M^{\frac{1}{2}}$ è la matrice diagonale con elementi $\sqrt{M_{ii}}$. Ora, sfruttando la (\star) ,

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{\mathbf{X}}} &= M^{\frac{1}{2}} \ddot{\underline{\mathbf{R}}} = -M^{\frac{1}{2}} M^{-1} H_0 (\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}_{eq}) = -M^{-\frac{1}{2}} H_0 (\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}_{eq}) \\ &= -(M^{-\frac{1}{2}} H_0 M^{-\frac{1}{2}}) M^{\frac{1}{2}} (\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}_{eq}) \\ &= -H \underline{\mathbf{X}}, \end{aligned}$$

dove $H = M^{-\frac{1}{2}} H_0 M^{-\frac{1}{2}}$ è simmetrica e definita strettamente positiva. Da cui

$$M \ddot{\underline{\mathbf{R}}} = -H_0 (\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}_{eq}) \iff M^{\frac{1}{2}} \ddot{\underline{\mathbf{X}}} = -H_0 M^{-\frac{1}{2}} \underline{\mathbf{X}}.$$

Osservazione. Ingenuamente si potrebbe tentare di lavorare direttamente su

$$\ddot{\underline{\mathbf{R}}} = -M^{-1} H_0 (\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}_{eq}).$$

Ma, in generale, la matrice $M^{-1} H_0$ non è simmetrica.

H , in quanto simmetrica e definita strettamente positiva, è diagonalizzabile. Pertanto esiste una base ortonormale $\underline{\mathbf{v}}_1, \dots, \underline{\mathbf{v}}_n$ di H , tale che

$$H \underline{\mathbf{v}}_i = \omega_i^2 \underline{\mathbf{v}}_i \quad \text{con} \quad \omega_i \neq 0,$$

dove gli ω_i^2 sono gli autovalori associati; questa notazione serve a sottolinearne la positività.

la definizione è lecita in quanto M è una matrice diagonale con elementi positivi

Definizione 2.7 – Frequenze normali

Sia \underline{R}_{eq} un punto di equilibrio stabile per il sistema. Si definiscono *frequenza normale* delle piccole oscillazioni, gli autovalori ω_i^2 associati alla matrice

$$H = M^{-\frac{1}{2}} H_0 M^{-\frac{1}{2}}.$$

Notazione. Gli autovalori ω_i^2 prendono anche il nome di frequenze proprie o caratteristiche.

Esprimendo i valori di \underline{X} tramite la base diagonalizzante per H , avremo

$$\underline{X}(t) = y_1(t)\underline{v}_1 + \dots + y_n(t)\underline{v}_n,$$

dove

$$\ddot{y}_i(t) = -\omega_i^2 y_i(t).$$

Risolvendo questa equazione differenziale si ottiene

$$y_i(t) = y_i(0) \cos(\omega_i t) + \frac{\dot{y}_i(0)}{\omega_i} \sin(\omega_i t) = a_i \cos(\omega_i t + \varphi_i).$$

Riportandoci in forma vettoriale:

$$\underline{X}(t) = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \underline{v}_1 + \dots + a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \underline{v}_n,$$

da cui, ricordando la definizione di \underline{X} , otteniamo infine

$$\underline{R}(t) = \underline{R}_{eq} + M^{-\frac{1}{2}} \underline{X}(t) = \underline{R}_{eq} + a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) M^{-\frac{1}{2}} \underline{v}_1 + \dots + a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) M^{-\frac{1}{2}} \underline{v}_n$$

Osservazione. Per calcolare gli autovalori di H , dobbiamo trovare le radici del suo polinomio caratteristico. Alternativamente possiamo ridurci ad H_0 :

$$\begin{aligned} \det(H - \lambda \text{Id}) &= \det(M^{-\frac{1}{2}} H_0 M^{-\frac{1}{2}} - \lambda \text{Id}) = \det[M^{-\frac{1}{2}} (H_0 - \lambda M) M^{-\frac{1}{2}}] \\ &= \det(M^{-\frac{1}{2}}) \det(H_0 - \lambda M) \det(M^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\det M} \det(H_0 - \lambda M). \end{aligned}$$

In particolare, dal momento che $\det M \neq 0$, avremo

$$\det(H - \lambda \text{Id}) = 0 \iff \det(H_0 - \lambda M) = 0.$$

Osservazione. Anche per l'espressione dell'azione degli autovettori di H possiamo ricondurci ad H_0 , infatti:

$$H \underline{v}_i = \omega_i^2 \underline{v}_i \iff M^{-\frac{1}{2}} H_0 M^{-\frac{1}{2}} \underline{v}_i = \omega_i^2 \underline{v}_i \iff H_0 \underline{u}_i = \omega_i^2 M \underline{u}_i,$$

dove $\underline{u}_i = M^{-\frac{1}{2}} \underline{v}_i$.

2.4 ESERCIZI

Esercizio 2.1 (Esercitazione 08/03). Considerare il moto di un punto materiale, di massa $m = 1$, soggetto ad un potenziale

$$U(x) = \frac{x^4}{4} + \alpha \frac{x^2}{2}.$$

1. Trovare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, i punti di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità.
2. Nei casi in cui x_{eq} è stabile, trovare l'equazione linearizzata associata e la frequenza normale delle piccole oscillazioni.

Soluzione. Per definizione un punto x_{eq} è di equilibrio se $U'(x_{eq}) = 0$. Ora 1)

$$U'(x) = x^3 + \alpha x = x(x^2 + \alpha).$$

Quindi

$$U'(x) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ x = 0 \vee x = \pm\sqrt{-\alpha} & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Per cui i punti di equilibrio saranno $x_1 = 0$ se $\alpha > 0$, oppure $x_2 = 0, x_{3,4} = \pm\sqrt{-\alpha}$ se $\alpha < 0$. Valutiamone la stabilità:

$$U''(x) = 3x^2 + \alpha,$$

quindi

$$\begin{aligned} U''(x_1) &= \alpha > 0 & \text{se } \alpha > 0; \\ U''(x_2) &= \alpha < 0 & \text{se } \alpha < 0; \\ U''(x_{3,4}) &= -3\alpha + \alpha = -2\alpha > 0 & \text{se } \alpha < 0. \end{aligned}$$

Applicando il teorema di Dirichlet, avremo che $x_1, x_{3,4}$ sono punti di minimo e pertanto stabili per il sistema; mentre x_2 è un punto di massimo e quindi instabile per il sistema.

In generale sappiamo che l'equazione linearizzata associata ad un punto di equilibrio è data da 2)

$$M \ddot{\underline{x}} = -H_0(\underline{x} - \underline{x}_{eq}).$$

Nel caso monodimensionale, H_0 è semplicemente $U''(x_{eq})$. Quindi per il caso $\alpha > 0$ avremo

$$\ddot{x} = -\alpha x \quad \text{e} \quad \omega^2 = \alpha.$$

Mentre, per il caso $\alpha < 0$, avremo

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -(-2\alpha)(x - \sqrt{-\alpha}) & \text{e} & \quad \omega^2 = -2\alpha; \\ \ddot{x} &= -(-2\alpha)(x + \sqrt{-\alpha}) & \text{e} & \quad \omega^2 = -2\alpha. \end{aligned}$$

Parte II

Analisi qualitativa del moto

3 | SISTEMI CONSERVATIVI UNIDIMENSIONALI

L'equazione generale del moto, in un sistema conservativo unidimensionale, è data da

$$m \ddot{x}(t) = -U'(x(t)).$$

Osservazione. Come al solito, quando si studia un sistema conservativo, è naturale domandarsi quando, in presenza di un'equazione di forze posizionali

$$m \ddot{x} = F(x),$$

sia lecito scrivere $F(x) = -U'(x)$.

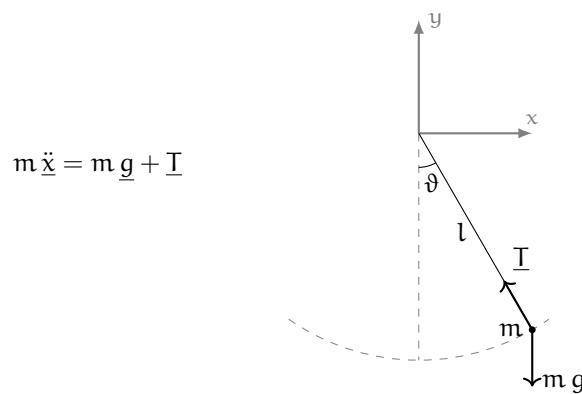
Nel caso monodimensionale, ogni forza posizionale è conservativa in quanto continua. Infatti per il Teorema Fondamentale del Calcolo si ha

$$U(x) = - \int_0^x F(t) dt.$$

3.1 PENDOLO MATEMATICO

In questo paragrafo discuteremo il modello del *pendolo matematico*. Osserveremo in particolare come partendo da un sistema bidimensionale non conservativo e restringendoci all'unica direzione non banale, otterremo un'equazione conservativa unidimensionale.

Il modello è costituito da una massa puntiforme m , collegata attraverso un filo inestensibile di lunghezza l al punto di sospensione. Il moto di m sarà pertanto un moto circolare di raggio l . L'equazione del moto sarà pertanto

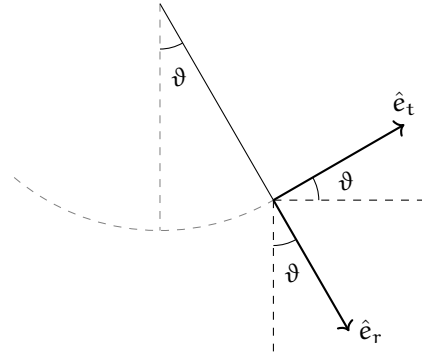


dove \underline{g} è l'accelerazione di gravità rivolta verso il basso e \underline{T} è la tensione del filo. In particolare, se definiamo con ϑ l'angolo che viene individuato dalla massa con la normale al punto di sospensione, avremo

$$\underline{x} = l \begin{pmatrix} \sin \vartheta \\ -\cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \underline{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}, \quad \underline{T} = T \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Definiamo le componenti radiali \hat{e}_r e tangenziali \hat{e}_t del punto materiale:

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \\ -\cos \vartheta \end{pmatrix} \quad e \quad \hat{e}_t = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$$



Proiettiamo il moto lungo queste componenti, le quali costituiscono chiaramente una base ortonormale. Per il vettore posizione avremo

$$\underline{x} = l \begin{pmatrix} \sin \vartheta \\ -\cos \vartheta \end{pmatrix} = l \hat{e}_r \implies \dot{\underline{x}} = l \dot{\vartheta} \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} = l \dot{\vartheta} \hat{e}_t,$$

da cui

$$\ddot{\underline{x}} = l \ddot{\vartheta} \hat{e}_t + l \dot{\vartheta}^2 \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} = l \ddot{\vartheta} \hat{e}_t - l \dot{\vartheta}^2 \hat{e}_r.$$

La tensione si proietta direttamente, infatti

$$\underline{I} = T \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} = -T \hat{e}_r.$$

Resta infine da scrivere \underline{g} nella nuova base, per farlo proiettiamo direttamente tramite prodotto scalare:

$$\underline{g} \cdot \hat{e}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \vartheta \\ -\cos \vartheta \end{pmatrix} = g \cos \vartheta \quad e \quad \underline{g} \cdot \hat{e}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} = -g \sin \vartheta;$$

da cui

$$\underline{g} = g \cos \vartheta \hat{e}_r - g \sin \vartheta \hat{e}_t.$$

Sostituendo nell'equazione del moto otteniamo

$$m \ddot{\underline{x}} = m \underline{g} + \underline{I} \iff m l \ddot{\vartheta} \hat{e}_t - m l \dot{\vartheta}^2 \hat{e}_r = m g \cos \vartheta \hat{e}_r - m g \sin \vartheta \hat{e}_t - T \hat{e}_r,$$

che può essere espresso tramite il sistema

$$\begin{cases} m l \ddot{\vartheta} = -m g \sin \vartheta \\ -m l \dot{\vartheta}^2 = m g \cos \vartheta - T \end{cases}$$

La seconda ci dice immediatamente che la tensione dipende dalla velocità angolare, pertanto non è posizionale e tantomeno conservativa.

$$m l \ddot{\vartheta} = -m g \sin \vartheta.$$

Equazione del pendolo matematico

Notazione. Alternativamente possiamo scrivere l'equazione del pendolo matematico come

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l} \sin \vartheta = -\omega^2 \sin \vartheta.$$

Osserviamo che ha senso identificare g/l come una frequenza al quadrato in quanto ha le dimensioni del reciproco di un tempo al quadrato, infatti

$$\left[\frac{g}{l} \right] = \left[\frac{l}{t^2} \right] \frac{1}{[l]} = \frac{1}{[t]^2}.$$

Cerchiamo di esprimere quest'ultima equazione attraverso un "potenziale", come avviene per le equazioni del moto conservative:

$$\ddot{\vartheta} = -\omega^2 \sin \vartheta = -\omega^2 \frac{\partial}{\partial \vartheta} (1 - \cos \vartheta) = -u'(\vartheta),$$

dove $u(\vartheta) = \omega^2(1 - \cos \vartheta)$. Possiamo quindi scrivere l'energia del sistema, che in quanto conservativa sarà costante:

$$\frac{\dot{\vartheta}^2}{2} + u(\vartheta) = \text{cost.}$$

Possiamo ricondurci alle dimensioni di un'energia moltiplicando ambo i membri per $m l^2$, ottenendo

$$m l^2 \frac{\dot{\vartheta}^2}{2} + m l^2 u(\vartheta) = E,$$

da cui

$$\frac{\dot{\vartheta}^2}{2} + u(\vartheta) = \frac{E}{m l^2}.$$

Equazione dell'energia del sistema

non possiamo parlare propriamente di potenziale in quanto le dimensioni fisiche sono diverse

3.1.1 PIANO DELLE FASI

L'equazione del pendolo ci dice che il moto di $\vartheta(t)$ a energia E , si svolge sulla curva di livello di equazione

$$\dot{\vartheta} = \pm \sqrt{2 \left(\frac{E}{m l^2} - u(\vartheta) \right)}. \quad (*)$$

Per visualizzare meglio la struttura delle soluzioni, possiamo considerare il piano $(\vartheta, \dot{\vartheta})$ detto piano delle fasi. Nel nostro caso esso corrisponde all'insieme delle curve di livello Γ_E

$$\Gamma_E = \left\{ (\vartheta, \dot{\vartheta}) \mid \frac{\dot{\vartheta}^2}{2} + u(\vartheta) = \frac{E}{m l^2} \right\},$$

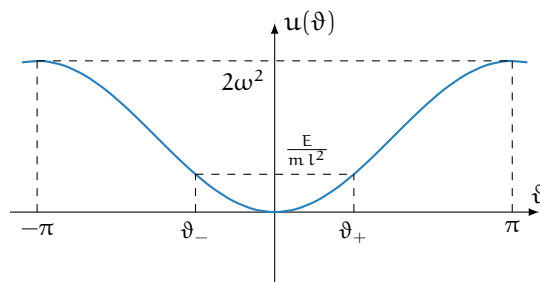
al variare della costante E .

Osservazione. Il procedimento che applicheremo a questo scopo, è in generale applicabile per ottenere il grafico qualitativo di altri piani di fasi.

Dal momento che ϑ è una variabile angolare, possiamo restringerci ad un dominio di ampiezza 2π come $[-\pi, \pi]$.

Osservazione. Analogamente potremmo dire che $u(\vartheta)$ è periodica con $T = 2\pi$.

Per prima cosa facciamo un grafico qualitativo di $u(\vartheta) = \omega^2(1 - \cos \vartheta)$:

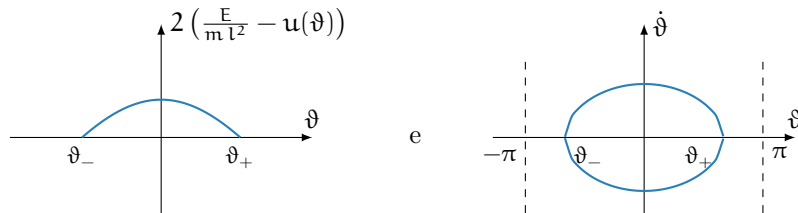


Come si evince anche dal grafico, $u(\vartheta)$ ha un punto di equilibrio stabile in 0 e due punti di equilibrio instabili in $\pm\pi$. Dobbiamo valutare tre casi al variare di $\frac{E}{m l^2}$, che chiameremo rispettivamente sottocritico, critico e sovracritico.

Per $0 < \frac{E}{m l^2} < 2\omega^2$, che è il caso disegnato nel grafico precedente, avremo che la porzione di grafico rilevante per la curva di livello, sarà compresa fra ϑ_- e ϑ_+ . In particolare avremo

$$\vartheta_+ = \arccos\left(1 - \frac{E}{m l^2 \omega^2}\right) \quad \text{e} \quad \vartheta_- = -\vartheta_+.$$

In particolare il grafico del radicando di $(*)$ e la conseguente curva di livello saranno,



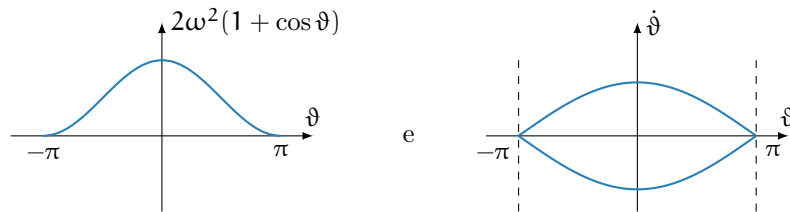
Come possiamo vedere il raccordo nella curva di livello è liscio, questo poiché, non essendo punti critici di u , la derivata del radicando in ϑ_- e ϑ_+ è diversa da zero.

Osservazione. In realtà il raccordo non è solo continuo ma addirittura C^∞ . Questo poiché l'espressione si ottiene come soluzione di un problema di Cauchy i cui dati sono C^∞ e la cui soluzione è pertanto parametrizzata come punti C^∞ .

Questa sorta di ellisse si espande all'aumentare di E fino al raggiungimento del caso critico, in cui $\frac{E}{m l^2} = 2\omega^2$. In questo caso $(*)$ assume la forma

$$\dot{\vartheta} = \pm \sqrt{2(2\omega^2 - \omega^2 + \omega^2 \cos \vartheta)} = \pm \sqrt{2\omega^2(1 + \cos \vartheta)}.$$

In questo caso i grafici diventano



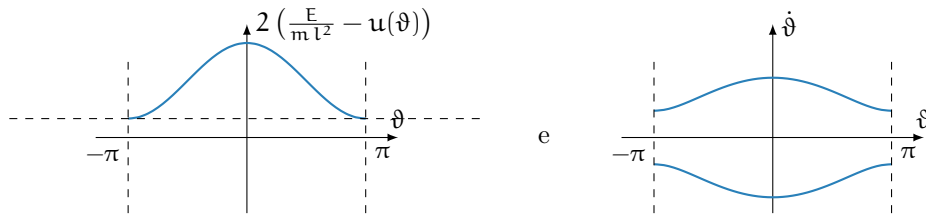
Osserviamo che in questo caso non vi è raccordo negli zeri. Questo poiché il termine dominante nell'espansione di Taylor di $2\omega^2(1 + \cos \vartheta)$ negli zeri $\pm\pi$, è

$$\omega^2(\vartheta \mp \pi)^2,$$

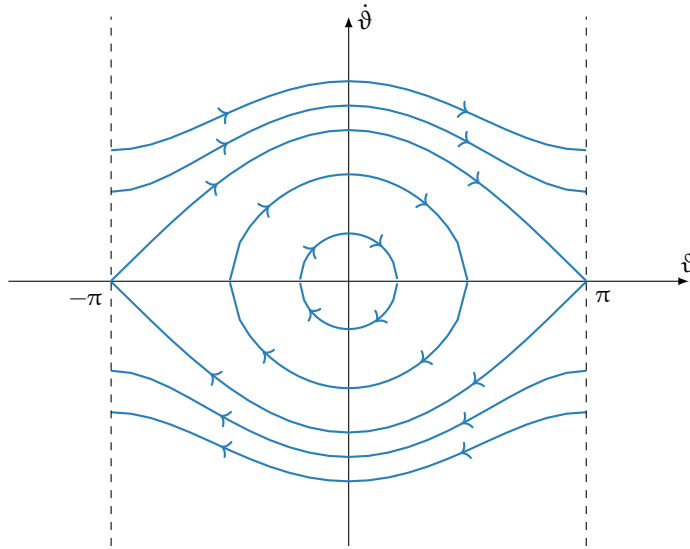
pertanto, passando alla radice nella curva di livello, il termine dominante è lineare e il raccordo non sarà pertanto liscio.

Osservazione. Questo mancato raccordo non nega l'osservazione precedente sul raccordo C^∞ . Questa situazione vi si configura osservando che, in questo caso, il moto si compie unicamente nel semipiano superiore o in quello inferiore, senza mai attraversare l'asse ϑ .

Discutiamo infine il caso sovracritico in cui $\frac{E}{m l^2} > 2\omega^2$. In tal caso i grafici qualitativi saranno



Possiamo infine riepilogare l'andamento qualitativo del moto sul piano delle fasi



dove il verso delle curve è dato dal segno di $\dot{\vartheta}$. Esso è infatti positivo quando la velocità angolare si trova nel semipiano superiore e, viceversa, negativo quando è in quello inferiore.

3.1.2 SOLUZIONI ANALITICHE

Discutiamo adesso le soluzioni analitiche, anche dette *soluzioni per quadrature*. Cominciamo con il caso sottocritico, che ricordiamo essere quello in cui

$$0 < \frac{E}{m l^2} < 2\omega^2.$$

Scegliamo un istante iniziale t_0 in cui $\dot{\vartheta}(t_0) > 0$. Per $t_0 < t < t_1$, dove t_1 è un istante ancora da determinare in cui $\vartheta(t_1) = \vartheta_+$, avremo

$$\dot{\vartheta} = +\sqrt{2\left(\frac{E}{m l^2} - u(\vartheta)\right)}.$$

Per separazione di variabili e integrando fra t_0 e t otteniamo

$$F(\vartheta(t)) = \int_{\vartheta_-}^{\vartheta(t)} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2\left(\frac{E}{m l^2} - u(\vartheta)\right)}} = t - t_0$$

Quest'ultima è la soluzione per quadratura valida per ogni $t \in [t_0, t_1]$. Da ciò possiamo anche ottenere un'espressione per t_1 :

$$\vartheta(t_1) = \vartheta_+ \implies t_1 = t_0 + \int_{\vartheta_-}^{\vartheta_+} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2\left(\frac{E}{m l^2} - u(\vartheta)\right)}}.$$

Osserviamo inoltre che $F(\vartheta)$ è invertibile, in particolare da $F(\vartheta(t)) = t - t_0$ otteniamo

$$\vartheta(t) = F^{-1}(t - t_0).$$

Soluzione analitica nel caso sottocritico

Osservazione. $F(\vartheta_-) = 0$ e $F(\vartheta)$ è monotona strettamente crescente per $\vartheta_- \leq \vartheta \leq \vartheta_+$, pertanto è invertibile.

Osservando il piano delle fasi, ci aspettiamo che t_1 sia finito per il caso sottocritico, ovvero che

$$\int_{\vartheta_-}^{\vartheta_+} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2\left(\frac{E}{m l^2} - u(\vartheta)\right)}} < +\infty.$$

Dobbiamo pertanto studiare l'andamento del denominatore. Se ϑ è sufficientemente vicino a ϑ_- , avremo

$$\frac{E}{m l^2} - u(\vartheta) = c(\vartheta - \vartheta_-) + \mathcal{O}((\vartheta - \vartheta_-)^2) \simeq c(\vartheta - \vartheta_-).$$

Da cui

$$\int_{\vartheta_-}^{\vartheta_- + \varepsilon} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2\left(\frac{E}{m l^2} - u(\vartheta)\right)}} \simeq \int_{\vartheta_-}^{\vartheta_- + \varepsilon} \frac{d\vartheta}{\sqrt{c(\vartheta - \vartheta_-)}} < +\infty.$$

E analogamente si mostra

$$\int_{\vartheta_+ - \varepsilon}^{\vartheta_+} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2\left(\frac{E}{m l^2} - u(\vartheta)\right)}} < +\infty.$$

Ripetiamo il procedimento per istanti t in cui $\dot{\vartheta} < 0$, ovvero per $t_1 \leq t \leq t_2$, dove t_2 è un'istante ancora da determinare in cui $\vartheta(t_2) = \vartheta_-$. In questo caso avremo

$$\dot{\vartheta} = -\sqrt{2\left(\frac{E}{m l^2} - u(\vartheta)\right)}.$$

Nuovamente per separazione di variabili e integrando fra t_1 e t otteniamo

$$G(\vartheta(t)) = \int_{\vartheta(t)}^{\vartheta_+} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2\left(\frac{E}{m l^2} - u(\vartheta)\right)}} = t - t_1.$$

Osserviamo che

$$G(\vartheta(t)) = \int_{\vartheta_-}^{\vartheta_+} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2\left(\frac{E}{m l^2} - u(\vartheta)\right)}} - F(\vartheta(t)),$$

inoltre anche G è invertibile, per cui

$$G(\vartheta(t)) = t - t_1 \iff \vartheta(t) = G^{-1}(t - t_1) = F^{-1}\left(\int_{\vartheta(t)}^{\vartheta_+} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2\left(\frac{E}{m l^2} - u(\vartheta)\right)}} + t_1 - t\right).$$

Calcolando t_2 , possiamo infine determinare il periodo del moto:

$$t_2 = t_1 + \int_{\vartheta_-}^{\vartheta_+} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2\left(\frac{E}{m l^2} - u(\vartheta)\right)}} \implies T = 2 \int_{\vartheta_-}^{\vartheta_+} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2\left(\frac{E}{m l^2} - u(\vartheta)\right)}}.$$

L'intero procedimento può essere ripetuto per il caso sovracritico in cui $\frac{E}{m l^2} > 2\omega^2$. Sia t_0 l'istante in cui $\vartheta(t_0) = -\pi$. Se $\dot{\vartheta} > 0$ avremo

$$\dot{\vartheta} = +\sqrt{2\left(\frac{E}{m l^2} - u(\vartheta)\right)}.$$

Preso $t > t_0$ e integrando per separazione di variabile fra questi due istanti otteniamo

$$f(\vartheta(t)) = \int_{-\pi}^{\vartheta(t)} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2\left(\frac{E}{ml^2} - u(\vartheta)\right)}} = t - t_0.$$

Anche in questo caso f è monotona strettamente crescente e pertanto invertibile, da cui

$$\vartheta(t) = f^{-1}(t - t_0).$$

Soluzione analitica nel caso sovracritico

Osserviamo che in questo caso, come ci aspettiamo dal grafico, f è monotona crescente per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi l'inversa è globale. Il caso $\dot{\vartheta} < 0$ si descrive in modo del tutto analogo.

Discutiamo infine il caso critico in cui $\frac{E}{ml^2} = 2\omega^2$. In questo caso saremo in grado di fornire una soluzione esplicita. Scegliamo la determinazione positiva $\dot{\vartheta} > 0$ e l'istante iniziale $t_0 = 0$ per cui

$$\vartheta(0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\vartheta}(0) = 2\omega.$$

La curva di livello sarà data da

$$\dot{\vartheta} = +\sqrt{2\omega^2(1 + \cos \vartheta)} = \sqrt{2}\omega\sqrt{1 + \cos \vartheta},$$

ricordando che $\frac{1 + \cos \vartheta}{2} = \cos^2 \frac{\vartheta}{2}$, otteniamo

$$\dot{\vartheta} = 2\omega \cos \frac{\vartheta}{2},$$

dove la radice è certamente positiva in quanto

$$-\pi < \vartheta < \pi \implies \cos \frac{\vartheta}{2} > 0.$$

Procediamo integrando fra 0 e t per separazione di variabili:

$$\begin{aligned} 2\omega t &= \int_0^{\vartheta(t)} \frac{d\vartheta}{\cos \frac{\vartheta}{2}} = 2 \int_0^{\vartheta(t)/2} \frac{dx}{\cos x} = 2 \int_0^{\vartheta(t)/2} \frac{\cos x \, dx}{\cos^2 x} = 2 \int_0^{\vartheta(t)/2} \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x} & x = \vartheta/2 \\ &= 2 \int_0^{\sin \frac{\vartheta(t)}{2}} \frac{dy}{1 - y^2} = \int_0^{\sin \frac{\vartheta(t)}{2}} \left(\frac{1}{1 + y} + \frac{1}{1 - y} \right) dy = \left[\ln \frac{1 + y}{1 - y} \right]_0^{\sin \frac{\vartheta(t)}{2}} & y = \sin x \\ &= \ln \frac{1 + \sin \frac{\vartheta(t)}{2}}{1 - \sin \frac{\vartheta(t)}{2}}. \end{aligned}$$

Questa soluzione, oltre ad essere esplicita, è facilmente invertibile:

$$\begin{aligned} \ln \frac{1 + \sin \frac{\vartheta(t)}{2}}{1 - \sin \frac{\vartheta(t)}{2}} = 2\omega t &\iff \frac{1 + \sin \frac{\vartheta(t)}{2}}{1 - \sin \frac{\vartheta(t)}{2}} = e^{2\omega t} \iff 1 + \sin \frac{\vartheta(t)}{2} = e^{2\omega t} \left(1 - \sin \frac{\vartheta(t)}{2} \right) \\ &\iff \sin \frac{\vartheta(t)}{2} + e^{2\omega t} \sin \frac{\vartheta(t)}{2} = e^{2\omega t} - 1 \iff \sin \frac{\vartheta(t)}{2} = \frac{e^{2\omega t} - 1}{e^{2\omega t} + 1} \\ &\iff \sin \frac{\vartheta(t)}{2} = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{e^{\omega t} + e^{-\omega t}} = \tanh(\omega t), \end{aligned}$$

da cui

$$\vartheta(t) = 2 \arcsin(\tanh(\omega t)).$$

Soluzione analitica nel caso critico

Osservazione. Come ci aspettavamo dal piano delle fasi, nel caso critico si ha

$$\vartheta(t) \longrightarrow \pm\pi \quad \text{per } t \rightarrow \pm\infty.$$

3.2 MOTO UNIDIMENSIONALE GENERICO

In questo paragrafo descriveremo i passaggi effettuati nel caso del pendolo matematico per un sistema unidimensionale generico.

Consideriamo il moto in una dimensione descritto dall'equazione di Newton

$$m \ddot{x} = F(x) = -U'(x).$$

Abbiamo già osservato come, nel caso unidimensionale, quasi ogni funzione reale ammetta una primitiva. Pertanto, in ogni caso che ha senso di essere considerato, l'energia meccanica

$$E = m \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x),$$

è una grandezza conservata. Esplicitando \dot{x} è possibile ricavare, seppur non sempre in forma esplicita, l'equazione del moto

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

Definizione 3.1 – Curva di livello a energia costante

Consideriamo l'equazione del moto. Fissata l'energia E , definiamo la curva di livello a energia E come

$$\Sigma_E = \left\{ (x, \dot{x}) \mid m \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = E \right\},$$

ovvero i punti che soddisfano l'equazione del moto.

L'analisi qualitativa del moto di una particella sottoposta al potenziale U , si ottiene graficando il piano delle fasi (x, \dot{x}) . Di seguito descriviamo il procedimento per punti:

1. Graficare $U(x)$.
2. Identificare i punti critici del potenziale U . Ad essi corrispondono i cosiddetti *livelli di energia critici*.
3. Disegnare i moti delle separatrici, cioè i moti in corrispondenza dei livelli di energia critici per massimi o flessi. Il grafico si ottiene da quello di U , è sufficiente considerare la porzione di piano al di sotto della retta orizzontale alla quota del livello di energia critico, ma riflesso rispetto a quest'ultima. Nei punti in cui il grafico interseca la retta bisogna considerare diverse possibilità:
 - Se il punto non è instabile, la tangente alla curva sarà verticale
 - Se il punto è uno zero quadratico (tipicamente un massimo), la curva avrà una singolarità di punto angoloso.
 - Se il punto è un flesso, cioè uno zero almeno cubico, la curva avrà una tangente orizzontale.
4. Orientare i rami secondo il segno di \dot{x} . Di conseguenza quelli del semipiano superiore si sposteranno verso destra, mentre quelli del semipiano inferiore verso sinistra.
5. Descrivere qualitativamente i moti, e disegnarli, per ogni livello di energia.
6. Se richiesto, ricavare la legge oraria, che in forma implicita è data da

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}},$$

dove x_0 è un punto opportuno per il moto (tipicamente il punto di inversione della velocità o l'infinito). Se non fosse possibile calcolare la legge oraria in forma esplicita, è sempre possibile fare le seguenti analisi qualitative:

Curve chiuse lisce Si tratta di oscillazioni periodiche limitate. Il cui periodo è dato da

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}},$$

dove x_1, x_2 sono i punti di inversione della velocità. L'integrale è singolare per $U(x) = E$, ma converge.

Curve aperte lisce Si tratta di moti non periodici e non limitati. Le particelle vengono dall'infinito e vanno verso il punto di inversione x_0 . In questo tipo di moti siamo interessati a capire se le particelle arrivano in tempo finito all'infinito (o ad x_0) o meno. Per stabilirlo, è sufficiente studiare la convergenza di

$$t_\infty - t_0 = \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}.$$

Se l'integrale converge il tempo per raggiungere l'infinito è finito e la soluzione risulterà locale, altrimenti il tempo sarà infinito e la soluzione globale. In generale per verificare la convergenza, è sufficiente controllare se

$$-U(x) \geq x^{2+\varepsilon}.$$

Sella separatrice Potrebbe sembrare un moto chiuso, ma in questo caso il tempo per raggiungere la sella è sempre infinito. Da questo deriva che i punti di sella sono instabili.

Moduli separatori La curva ha una singolarità di punto angoloso (tipicamente nei punti di massimo). La particella arriva nel punto critico in un tempo infinito.

Punti critici Se la particella parte da un punto critico con velocità nulla, non si sposterà da quel punto.

4 | MOTI IN CAMPO CENTRALE

4.1 INTRODUZIONE

Definizione 4.1 – Forza centrale

Una forza $\underline{F}(\underline{r}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice *centrale* se è esprimibile attraverso una forza scalare che dipende solo dalla distanza dall'origine, ovvero

$$\underline{F}(\underline{r}) = F(|\underline{r}|) \hat{r} \quad \text{dove } \hat{r} = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}.$$

Definizione 4.2 – Coppia di forze centrali

Consideriamo il sistema composto da due punti nello spazio sottoposti a forze reciproche \underline{f}_{12} e \underline{f}_{21} . Le due forze sono una *coppia di forze centrali* se sono opposte, se dipendono solo dalla distanza reciproca e se sono orientate come la congiungente delle particelle. Ovvero

$$\underline{f}_{12}(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = -\underline{f}_{21}(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = F(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|}.$$

Definizione 4.3 – Forza attrattiva

Una forza centrale $F(\underline{x})$ si dice *attrattiva in \underline{x}* se

$$F(\underline{x}) < 0.$$

Notazione. Se vale

$$F(\underline{x}) < 0 \forall \underline{x},$$

diremo che F è puramente attrattiva.

Definizione 4.4 – Forza repulsiva

Una forza centrale $F(\underline{x})$ si dice *repulsiva in \underline{x}* se

$$F(\underline{x}) > 0.$$

Notazione. Se vale

$$F(\underline{x}) > 0 \forall \underline{x},$$

diremo che F è puramente repulsiva.

Definizione 4.5 – Centro di massa

In un sistema di n particelle, si definisce *centro di massa* la posizione

$$\underline{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \underline{r}_i}{\sum m_i}.$$

Definizione 4.6 – Massa ridotta

In un sistema di n particelle, chiamiamo *massa ridotta* la quantità

$$m = \frac{\sum m_i}{\prod m_i}.$$

Osservazione. Tale quantità soddisfa la relazione

$$\frac{1}{m} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i}$$

Nello studio dei moti in campo centrale si presentano due possibili scenari:

- Una singola particella soggetta ad una forza centrale, la cui equazione sarà

$$m \ddot{\underline{r}} = \underline{F}(\underline{r}) = F(|\underline{r}|) \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|},$$

con $m > 0$ e $\underline{r} \in \mathbb{R}^3$.

- Due particelle soggette ad una coppia di forze centrali, le cui equazioni saranno

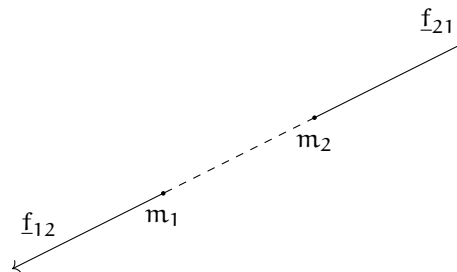
$$\begin{cases} m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = \underline{f}_{12}(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = F(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|} \\ m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = \underline{f}_{21}(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = F(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \frac{\underline{r}_2 - \underline{r}_1}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|} \end{cases}$$

dove $m_1, m_2 > 0$ e $\underline{r}_1, \underline{r}_2 \in \mathbb{R}^3$.

4.2 RICONDUCEBILITÀ AL CASO DI SINGOLA PARTICELLA

Valutiamo come sia possibile ricondurre il secondo caso al primo. Abbiamo già osservato come il sistema si presenta:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = F(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|} \\ m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = F(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \frac{\underline{r}_2 - \underline{r}_1}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|} \end{cases}$$



Le due forze sono opposte, quindi sommando le due equazioni si ottiene

$$m_1 \ddot{\underline{r}}_1 + m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = \underline{0}.$$

Moltiplicando e dividendo per la massa totale $m_1 + m_2$ si ottiene l'espressione con il centro di massa

$$(m_1 + m_2) \ddot{\underline{R}} = \underline{0}.$$

Da ciò segue che l'accelerazione del centro di massa è nulla, pertanto la sua legge oraria si esprime semplicemente tramite

$$\underline{\mathbf{R}}(t) = \underline{\mathbf{R}}(0) + \dot{\underline{\mathbf{R}}}(0) t.$$

Tornando al sistema iniziale, dividiamo ogni equazione per la rispettiva massa e sottraiamo la prima alla seconda:

$$\ddot{\underline{\mathbf{r}}}_2 - \ddot{\underline{\mathbf{r}}}_1 = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) F(|\underline{\mathbf{r}}_1 - \underline{\mathbf{r}}_2|) \frac{\underline{\mathbf{r}}_2 - \underline{\mathbf{r}}_1}{|\underline{\mathbf{r}}_1 - \underline{\mathbf{r}}_2|}.$$

Poniamo $\underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{r}}_2 - \underline{\mathbf{r}}_1$ e sostituiamo la massa ridotta per ottenere

$$\ddot{\underline{\mathbf{r}}} = \frac{1}{m} F(|\underline{\mathbf{r}}|) \hat{\mathbf{r}}.$$

Ci siamo pertanto ridotti al sistema

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{R}}(t) = \underline{\mathbf{R}}(0) + \dot{\underline{\mathbf{R}}}(0) t \\ \ddot{\underline{\mathbf{r}}} = \frac{1}{m} F(|\underline{\mathbf{r}}|) \hat{\mathbf{r}} \end{cases}$$

Noti $\underline{\mathbf{r}}(t)$ e $\underline{\mathbf{R}}(t)$ possiamo ricavare le leggi orarie delle due particelle attraverso il sistema

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{r}}(t) = \underline{\mathbf{r}}_2(t) - \underline{\mathbf{r}}_1(t) \\ \underline{\mathbf{R}}(t) = \frac{m_1}{m_1+m_2} \underline{\mathbf{r}}_1(t) + \frac{m_2}{m_1+m_2} \underline{\mathbf{r}}_2(t) \end{cases}$$

Moltiplicando la prima riga per $\frac{m_2}{m_1+m_2}$ e sottraendo le due righe si ottiene

$$\underline{\mathbf{R}}(t) - \frac{m_2}{m_1+m_2} \underline{\mathbf{r}}(t) = \frac{m_1}{m_1+m_2} \underline{\mathbf{r}}_1(t) + \frac{m_2}{m_1+m_2} \underline{\mathbf{r}}_1(t) = \underline{\mathbf{r}}_1(t).$$

Analogamente si trova $\underline{\mathbf{r}}_2$. Riepilogando

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{r}}_1 = \underline{\mathbf{R}} - \frac{m_2}{m_1+m_2} \underline{\mathbf{r}} \\ \underline{\mathbf{r}}_2 = \underline{\mathbf{R}} + \frac{m_1}{m_1+m_2} \underline{\mathbf{r}} \end{cases}$$

4.3 CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

La forza dei moti in campo centrale è del tipo $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. È facile osservare come tali F siano sempre conservative. Dal punto di vista fisico si considera $\underline{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^3 \setminus \underline{\mathbf{0}}$, pertanto è sufficiente verificare che F è chiusa affinché sia conservativa. Osserviamo che

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} |\underline{\mathbf{r}}| = \frac{\mathbf{r}_i}{|\underline{\mathbf{r}}|}.$$

Da cui

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \left(F(|\underline{\mathbf{r}}|) \frac{\mathbf{r}_j}{|\underline{\mathbf{r}}|} \right) = F'(|\underline{\mathbf{r}}|) \frac{\mathbf{r}_i}{|\underline{\mathbf{r}}|} \frac{\mathbf{r}_j}{|\underline{\mathbf{r}}|} - F(|\underline{\mathbf{r}}|) \frac{\mathbf{r}_j \mathbf{r}_i}{|\underline{\mathbf{r}}|^3} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} \left(F(|\underline{\mathbf{r}}|) \frac{\mathbf{r}_i}{|\underline{\mathbf{r}}|} \right),$$

pertanto $\underline{\mathbf{F}}(\underline{\mathbf{r}}) = F(|\underline{\mathbf{r}}|) \hat{\mathbf{r}}$ è conservativa per ogni scelta di F .

4.4 POTENZIALE RADIALE

In un problema a simmetria radiale come quello che stiamo considerando, ci aspettiamo che l'energia potenziale sia unicamente funzione di $|\underline{\mathbf{r}}|$, ovvero che

$$U(\underline{\mathbf{r}}) = V(|\underline{\mathbf{r}}|).$$

Potenziale radiale

Verifichiamo che scegliendo U in questo modo, troviamo una soluzione di

$$-\frac{\partial}{\partial \underline{r}} U(\underline{r}) = \underline{F}(\underline{r}).$$

Ora

$$-\frac{\partial}{\partial \underline{r}} V(|\underline{r}|) = -V'(|\underline{r}|) \hat{r} = F(|\underline{r}|) \hat{r},$$

pertanto, posto $\rho = |\underline{r}|$,

$$V(\rho) = - \int^{\rho} F(t) dt$$

è una qualsiasi primitiva di F .

La conservatività ci permette di scrivere la legge di conservazione dell'energia meccanica

$$E = \frac{1}{2} m |\dot{\underline{r}}|^2 + V(|\underline{r}|).$$

Osservazione. Chiaramente

$$|\dot{\underline{r}}| \neq \frac{d}{dt} |\underline{r}|.$$

4.5 CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

In precedenza abbiamo visto come nel caso unidimensionale, fosse sufficiente una sola relazione conservativa per risolvere il sistema. In questo caso, in cui vi sono tre dimensioni, ci aspettiamo di doverne trovare altre affinché il sistema sia ugualmente risolubile. In particolare, osserveremo in seguito, che ci servono tanti integrali primi quanti sono i gradi di libertà del sistema.

In questo caso saremo in grado di trovare altri 3 integrali primi, uno in più del necessario.

Definizione 4.7 – Momento angolare

Consideriamo un punto materiale di massa m e posizione \underline{r} . Il *momento angolare* di tale punto è definito come il prodotto vettoriale del vettore posizione per il vettore quantità di moto:

$$\underline{L} = \underline{r} \wedge m \dot{\underline{r}}.$$

Verifichiamo che \underline{L} è una grandezza conservata, o integrale primo, per l'equazione del moto che stiamo considerando, ovvero che $\underline{L} = \underline{L}(\underline{r}, \dot{\underline{r}})$ è tale che

$$\frac{d}{dt} \underline{L}(\underline{r}(t), \dot{\underline{r}}(t))$$

se $\underline{r}(t)$ è soluzione di $m \ddot{\underline{r}} = F(|\underline{r}|) \hat{r}$. Verifichiamolo:

$$\frac{d}{dt} \underline{L} = \dot{\underline{r}} \wedge m \dot{\underline{r}} + \underline{r} \wedge m \ddot{\underline{r}} = \underline{r} \wedge m \ddot{\underline{r}}.$$

Ora se $\underline{r}(t)$ è soluzione del moto, possiamo sostituire $m \ddot{\underline{r}}$, da cui

$$\frac{d}{dt} \underline{L} = \underline{r} \wedge F(|\underline{r}|) \hat{r} = \underline{r} \wedge F(|\underline{r}|) \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} = \frac{F(|\underline{r}|)}{|\underline{r}|} (\underline{r} \wedge \underline{r}) = \underline{0}.$$

Dalla conservazione di \underline{L} otteniamo quindi tre leggi di conservazione date dalle conservazioni delle singole componenti di \underline{L}

4.5.1 CASO BANALE

Supponiamo che $\underline{L} \equiv \underline{0}$, pertanto $\underline{r}(0) \parallel \dot{\underline{r}}(0)$. Definiamo

$$\hat{n}_0 = \frac{\underline{r}(0)}{|\underline{r}(0)|}$$

la direzione iniziale di \underline{r} e $\dot{\underline{r}}$. Di conseguenza l'equazione del moto assume una forma molto semplice:

$$\underline{r}(t) = x(t) \hat{n}_0.$$

Dove, sostituendo nell'equazione del moto, si ottiene che $x(t)$ risolve

$$m \ddot{x} = F(|x|)$$

in quanto \hat{n}_0 è indipendente dal tempo e pertanto

$$\ddot{\underline{r}}(t) = \ddot{x}(t) \hat{n}_0.$$

Per cui ci siamo ridotti ad un sistema conservativo unidimensionale.

4.6 RIDUZIONE DIMENSIONALE

Supponiamo che $\underline{L} \neq \underline{0}$

Notazione. Da qui in avanti esprimeremo \underline{L} anche in coordinate sferiche, tramite il suo modulo $L = |\underline{L}|$ e gli angoli ϑ e φ che lo individuano nello spazio.

Dal momento che \underline{L} si conserva, la sua direzione sarà invariante. Questo ci dice che $\underline{r}(t), \dot{\underline{r}}(t)$ appartengono al piano perpendicolare a \underline{L} e passante per l'origine per ogni $t \geq 0$.

È quindi conveniente scegliere delle coordinate che siano legate a questo piano per descrivere il moto del sistema. Tali coordinate x', y', z' saranno definite in modo che

$$\hat{z}' = \hat{L}.$$

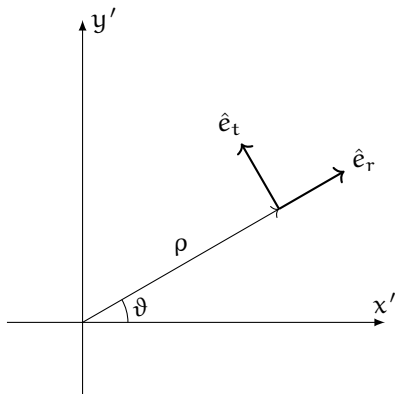
Nelle nuove coordinate avremo

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{pmatrix}$$

Ci siamo quindi ridotti ad un sistema bidimensionale. Possiamo semplificare ulteriormente la notazione passando in coordinate polari, ottenendo

$$\underline{r}(t) = \rho(t) \begin{pmatrix} \cos \vartheta(t) \\ \sin \vartheta(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \rho(t) = |\underline{r}(t)|.$$

Infine possiamo introdurre i versori radiale \hat{e}_r e tangenziale \hat{e}_t come mostrati nel piano (x', y') :



$$\text{con} \quad \hat{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \vartheta(t) \\ \sin \vartheta(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{e}_t = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta(t) \\ \cos \vartheta(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Procediamo quindi a tradurre tutte le espressioni del moto nelle nuove coordinate. Per definizione

$$\underline{r} = \rho \hat{e}_r,$$

da cui

$$\dot{\underline{r}} = \dot{\rho} \hat{e}_r + \rho \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\vartheta} = \dot{\rho} \hat{e}_r + \rho \dot{\vartheta} \hat{e}_t.$$

Tramite $\dot{\underline{r}}$ possiamo calcolare $|\dot{\underline{r}}|^2$:

$$|\dot{\underline{r}}|^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\vartheta}^2.$$

Pertanto, sostituendo nell'espressione dell'energia meccanica, otteniamo

$$E = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} m \rho^2 \dot{\vartheta}^2 + V(\rho).$$

Energia meccanica ridotta

Mentre, sostituendo nell'espressione del momento angolare, otteniamo

$$\underline{L} = \rho \hat{e}_r \wedge (m \dot{\rho} \hat{e}_r + m \rho \dot{\vartheta} \hat{e}_t) = m \rho^2 \dot{\vartheta} (\hat{e}_r \wedge \hat{e}_t) = m \rho^2 \dot{\vartheta} \hat{L},$$

dove $\hat{e}_r \wedge \hat{e}_t = \hat{L}$ poiché sappiamo che \hat{e}_r, \hat{e}_t individuano il piano perpendicolare a \hat{L} . Pertanto

$$\underline{L} = m \rho^2 \dot{\vartheta} \hat{L}.$$

Momento angolare ridotto

Traduciamo infine l'equazione del moto calcolando $\ddot{\underline{r}}$:

$$\ddot{\underline{r}} = \ddot{\rho} \hat{e}_r + \dot{\rho} \dot{\vartheta} \hat{e}_t + (\dot{\rho} \dot{\vartheta} + \rho \ddot{\vartheta}) \hat{e}_t - \rho \dot{\vartheta}^2 \hat{e}_r = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\vartheta}^2) \hat{e}_r + (2\dot{\rho} \dot{\vartheta} + \rho \ddot{\vartheta}) \hat{e}_t,$$

sostituendo nell'equazione del moto otteniamo

$$m \ddot{\underline{r}} = m (\ddot{\rho} - \rho \dot{\vartheta}^2) \hat{e}_r + m (2\dot{\rho} \dot{\vartheta} + \rho \ddot{\vartheta}) \hat{e}_t = F(\rho) \hat{e}_r,$$

da cui

$$\begin{cases} m \ddot{\rho} = F(\rho) + m \rho \dot{\vartheta}^2 \\ m \rho \ddot{\vartheta} + 2m \dot{\rho} \dot{\vartheta} = 0 \end{cases}$$

Equazione del moto ridotta

Osservazione. La seconda equazione corrisponde alla conservazione del momento angolare, infatti

$$\frac{d}{dt} \underline{L} = \underline{0} \iff 0 = \frac{d}{dt} m \rho^2 \dot{\vartheta} = 2m \rho \dot{\rho} \dot{\vartheta} + m \rho^2 \ddot{\vartheta} = \rho (2m \dot{\rho} \dot{\vartheta} + m \rho \ddot{\vartheta}).$$

4.7 POTENZIALE EFFICACE

Tramite la prima equazione

$$m \ddot{\rho} = F(\rho) + m \rho \dot{\vartheta}^2,$$

possiamo ricondurci ad un sistema unidimensionale che studi la componente radiale del moto. Sostituendo l'espressione del potenziale del momento angolare nell'equazione otteniamo

$$\begin{aligned} m\ddot{\rho} &= F(\rho) + m\rho\dot{\vartheta}^2 = -V'(\rho) + m\rho\frac{L^2}{m^2\rho^4} = -V'(\rho) + \frac{L^2}{m\rho^3} \\ &= -\left(V(\rho) + \frac{L^2}{2m\rho^2}\right)' = -V'_{\text{eff}}(\rho), \end{aligned}$$

dove

Definizione 4.8 – Potenziale efficace

In un sistema di moto, definiamo *potenziale efficace* un'espressione che coinvolge il potenziale e il momento angolare del sistema. Nel caso di moto in campo centrale avremo

$$V_{\text{eff}}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2m\rho^2}.$$

Da cui

$$m\ddot{\rho} = F(\rho) + m\rho\dot{\vartheta}^2 \iff m\ddot{\rho} = -V'_{\text{eff}}(\rho).$$

Possiamo facilmente osservare che

$$E = \frac{1}{2} m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} m\rho^2\dot{\vartheta}^2 + V(\rho),$$

è l'espressione della conservazione dell'energia meccanica per il sistema $m\ddot{\rho} = -V'_{\text{eff}}(\rho)$. Infatti, sostituendo l'espressione di $\dot{\vartheta}$, che troviamo nel momento angolare

$$L = m\rho^2\dot{\vartheta} \iff \dot{\vartheta} = \frac{L}{m\rho^2},$$

all'interno dell'energia meccanica, troviamo

$$E = \frac{1}{2} m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} m\rho^2\frac{L^2}{m^2\rho^4} + V(\rho) = \frac{1}{2} m\dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}(\rho).$$

Ci siamo quindi ricondotti ad un caso unidimensionale la cui equazione conservativa è

$$E = \frac{1}{2} m\dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}(\rho).$$

Integrale primo del moto radiale

4.8 MOTO COMPLESSIVO

Una volta descritto il moto radiale, è possibile analizzare quello angolare per descrivere il moto complessivo. L'espressione del moto angolare si ricava dalla relazione

$$L = m\rho^2\dot{\vartheta} \implies \dot{\vartheta} = \frac{L}{m\rho^2}.$$

In generale è utile definire la seguente quantità

$$w_1 = \dot{\vartheta} = \frac{L}{m\rho^2}.$$

Pulsazione angolare

4.8.1 TRAIETTORIA BANALE

Consideriamo inizialmente il caso notevole in cui il moto radiale è costante nel punto di equilibrio:

$$\rho(t) \equiv \rho_{eq}.$$

In questo caso il moto radiale è invariante, mentre quello angolare varia uniformemente. Infatti

$$\dot{\vartheta} = \frac{L}{m \rho_{eq}^2} = \omega_1$$

che è costante. Il moto complessivo è pertanto circolare uniforme di periodo

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}.$$

4.8.2 TRAIETTORIA CHIUSA NON SINGOLARE

Per traiettorie chiuse e non singolari, il moto è periodico

$$\rho(t) = \rho(t + T_0) \quad \text{con } T_0 = 2 \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}}$$

Osserviamo che, dal momento che ρ è periodica, la funzione integranda di

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \int_0^t \frac{L}{m \rho^2(s)} ds$$

sarà periodica di periodo T_0 . Inoltre avremo

$$\omega_1 \in \left(\frac{L}{m \rho_-^2}, \frac{L}{m \rho_+^2} \right) \quad \text{e} \quad \overline{\omega_1} = \int_0^{T_0} \frac{dt}{T_0} \omega_1(t).$$

$\overline{\omega_1}$ è il valor medio di ω_1

Da cui

$$\omega_1(t) = \overline{\omega_1} + f(t),$$

dove f è una funzione periodica a media nulla di periodo T_0 . Segue

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \overline{\omega_1} t + \int_0^t f(s) ds,$$

dove, nuovamente, l'integrale è una funzione periodica a media nulla di periodo T_0 . Pertanto $\vartheta(t)$ corrisponde ad un moto circolare uniforme di periodo

$$T_1 = \frac{2\pi}{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{L}{m \rho^2(s)} ds}$$

Periodo del moto angolare

Il moto complessivo è qualitativamente

FIGURA!!

Esso avviene pertanto nella corona circolare ρ_-, ρ_+ con

$$\Delta\vartheta = \omega_1 T_0 = \int_0^{T_0} \frac{L}{m \rho^2(s)} ds.$$

Osservazione. Se $\omega_1 T_0$ è un multiplo razionale di 2π , allora il moto complessivo è *periodico* di periodo $T_0 n = T_1 m$. Altrimenti si dice che è *quasi periodico*.

5 | MOTI IN CAMPO GRAVITAZIONALE E LEGGI DI KEPLERO

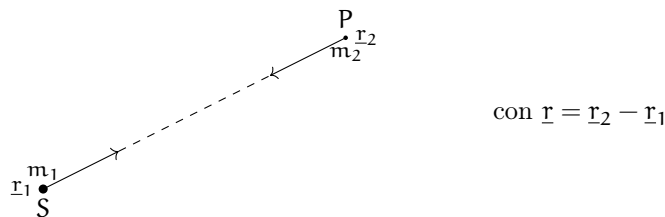
Come per il moto armonico, anche il moto generato dal potenziale gravitazionale è una caso di notevole importanza. Si dimostra infatti che i potenziali associati a questi moti, sono gli unici che generano moti limitati tutti periodici.

5.1 INTRODUZIONE

I moti in campo gravitazionale studiano il moto di due corpi attratti da una forza

$$F(|\underline{r}|) = -G \frac{m_1 m_2}{|\underline{r}|^2} \quad \text{con } G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}.$$

In generale si tratta di risolvere il problema di due corpi in moti a campo centrale. In particolare, tale problema ci permette di ricavare informazioni sul moto del pianeta P attorno al sole S



Nel caso planetario le masse hanno valori particolari:

$$m_1 = M_S = 2 \cdot 10^{30} \text{kg} \quad \text{e} \quad m_2 = m_P \ll M_S.$$

Questo fa sì che il baricentro sia spostato verso il sole, ovvero

$$\underline{R} = \frac{M_S \underline{r}_1 + m_P \underline{r}_2}{M_S + m_P} \simeq \underline{r}_1 \quad \text{e} \quad \underline{r}_2 = \underline{R} + \frac{M_S}{M_S + m_P} \underline{r} \simeq \underline{R} + \underline{r}.$$

Per tutti i fini pratici possiamo assumere che il baricentro coincida con il centro del sole. L'equazione del moto è pertanto

$$m \ddot{\underline{r}} = -G \frac{M_S m_P}{|\underline{r}|^2} \hat{\underline{r}} = -\frac{k}{|\underline{r}|^2} \hat{\underline{r}},$$

dove m è la massa ridotta:

$$m = \left(\frac{1}{M_S} + \frac{1}{m_P} \right)^{-1} \simeq \left(\frac{1}{m_P} \right)^{-1} = m_P.$$

5.2 SOLUZIONE DEL MOTO

La strategia risolutiva è la stessa utilizzata in generale nei moti in campo centrale. In questo particolare caso vedremo come molte informazioni possono essere ottenute in modo esplicito. Cominciamo con l'osservare che

$$F(|\underline{r}|) = -\frac{k}{|\underline{r}|^2} = -V'(|\underline{r}|) \quad \text{dove } V(|\underline{r}|) = -\frac{k}{|\underline{r}|}.$$

Si ottengono le equazioni conservative dell'energia meccanica e del momento angolare:

$$E = \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{r}}|^2 - \frac{k}{|\mathbf{r}|} \quad \text{e} \quad \underline{L} = m \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}.$$

Dove imponiamo $\underline{L} \neq \underline{0}$ per escludere casi banali.

Come abbiamo già discusso, per via della conservazione del momento angolare, il moto si svolge sul piano perpendicolare a \hat{L} e passante per l'origine. Passando in coordinate $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ adatte a \underline{L} , quindi con $\hat{z}' = \hat{L}$, e successivamente in coordinate polari, avremo

$$\mathbf{r} = \rho(t) \begin{pmatrix} \cos \vartheta(t) \\ \sin \vartheta(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

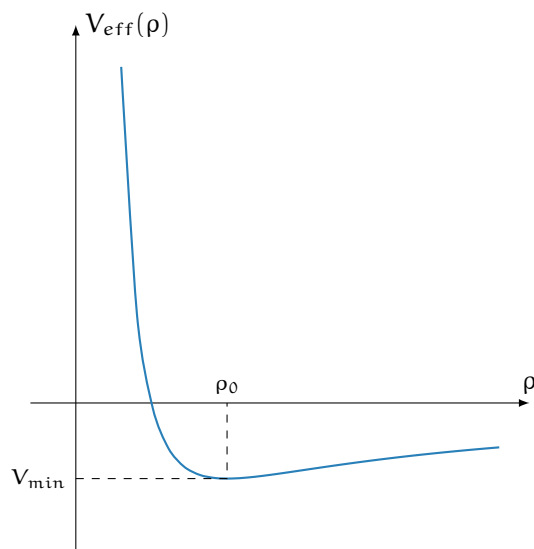
Come sappiamo questo ci permette di ridurre il moto radiale ad un moto unidimensionale. Ad esso associamo un potenziale efficace

$$V_{\text{eff}}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2m\rho^2}$$

per cui si hanno le seguenti leggi di conservazione:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}(\rho) \quad \text{e} \quad L = m \rho^2 \dot{\vartheta}.$$

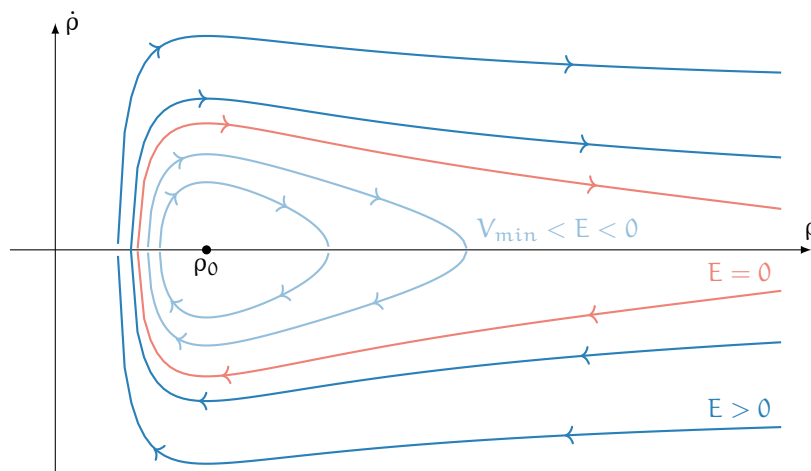
Dallo studio di V_{eff} si ottiene il seguente grafico qualitativo del potenziale efficace:



Dove $\rho_0 = \frac{L^2}{mk}$ è il punto critico di $V_{\text{eff}}(\rho)$, mentre V_{min} è il valore del minimo:

$$V_{\text{min}} = V_{\text{eff}}(\rho_0) = -\frac{mk^2}{2L^2}$$

Da cui il piano delle fasi



Nel caso critico, scegliendo ρ_0 come dato iniziale, si ha

$$\rho(t) \equiv \rho_0 = \frac{L^2}{m k} \quad \text{e} \quad \vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega_1 t.$$

Dove il periodo del moto angolare sarà

$$T = T_1 = \frac{2\pi L^3}{m k^2} = 2\pi \left(\frac{L^2}{m k} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \rho_0^{3/2},$$

da cui la pulsazione

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{m k^2}{L^3}.$$

La successiva discussione avrà come fine le soluzioni analitiche dei moti con orbite chiuse e periodiche, le quali abbiamo visto essere in corrispondenza di $V_{\min} < E < 0$. Il moto periodico avviene attorno ai due punti di inversione ρ_- e ρ_+ che sono soluzione di $V_{\text{eff}}(\rho) = E$. Esplicitamente:

$$\rho_{\pm} = \frac{k}{2|E|} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4E^2} - \frac{L^2}{2m|E|}},$$

da cui

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} - E &= -\frac{k}{\rho} + \frac{L^2}{2m\rho^2} + |E| = \frac{|E|}{\rho^2} \left(\rho^2 - \frac{k}{|E|} \rho + \frac{L^2}{2m|E|} \right) \\ &= \frac{|E|}{\rho^2} (\rho - \rho_+)(\rho - \rho_-). \end{aligned}$$

Da questa relazione deduciamo due relazioni notevoli utili per i calcoli:

$$\begin{cases} \rho_+ + \rho_- = \frac{k}{|E|} \\ \rho_+ \rho_- = \frac{L^2}{2m|E|}. \end{cases}$$

Calcoliamo ora il periodo del moto radiale:

$$\begin{aligned} T_0 &= 2 \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(\rho))}} = 2 \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} \frac{|E|}{\rho^2} (\rho_+ - \rho)(\rho - \rho_-)}} \\ &= \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho_+ - \rho)(\rho - \rho_-)}} \\ \mathbf{y} = \frac{\rho - \rho_-}{\rho_+ - \rho_-} & \\ z = \sqrt{y} & \\ &= \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \int_0^{+\infty} \frac{\rho_+ y + \rho_-}{1+y} \sqrt{\frac{1+y}{\rho_+ - \rho_-} \frac{1+y}{\rho_+ y - \rho_- y} \frac{\rho_+ - \rho_-}{(1+y)^2}} dy = \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \int_0^{+\infty} \frac{\rho_+ y + \rho_-}{\sqrt{y} (1+y)^2} dy \\ &= 2\sqrt{\frac{2m}{|E|}} \int_0^{+\infty} \frac{\rho_+ z^2 + \rho_-}{(1+z^2)^2} dz = 2\sqrt{\frac{2m}{|E|}} \int_0^{+\infty} \frac{\rho_+ z^2 + \rho_- (1+z^2 - z^2)}{(1+z^2)^2} dz \\ &= 2\sqrt{\frac{2m}{|E|}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\rho_-}{1+z^2} dz + \int_0^{+\infty} (\rho_+ - \rho_-) \frac{z^2}{(1+z^2)^2} dz \right), \end{aligned}$$

ora

$$\int_0^{+\infty} \frac{\rho_-}{1+z^2} dz = \rho_- \arctan z \Big|_0^{+\infty} = \rho_- \frac{\pi}{2},$$

mentre

$$\begin{aligned} (\rho_+ - \rho_-) \int_0^{+\infty} \frac{z^2}{(1+z^2)^2} dz &= (\rho_+ - \rho_-) \int_0^{+\infty} \frac{2z}{(1+z^2)^2} \frac{z}{2} dz \\ &= (\rho_+ - \rho_-) \left(-\frac{1}{1+z^2} \frac{z}{2} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2} \right) \\ &= (\rho_+ - \rho_-) \frac{1}{2} \arctan z \Big|_0^{+\infty} = \frac{\rho_+ - \rho_-}{2} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ricordando le relazioni notevoli dedotte in precedenza, concludiamo

$$T_0 = 2\sqrt{\frac{2m}{|E|}} \left(\rho_- \frac{\pi}{2} + \frac{\rho_+ - \rho_-}{2} \frac{\pi}{2} \right) = \pi \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \frac{\rho_+ + \rho_-}{2},$$

quindi

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \frac{k}{2|E|}.$$

Periodo del moto radiale

Il moto sarà pertanto descritto da

$$\rho(t) = \rho(t + T_0) \quad \text{dove } t = \int_{\rho_-}^{\rho(t)} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(\rho))}} \text{ per } t_0 \leq t \leq \frac{T_0}{2},$$

che è risolubile esplicitamente utilizzando la strategia precedente.

Per il moto angolare sfruttiamo la relazione di $\dot{\vartheta}$ con L :

$$\dot{\vartheta} = \frac{L}{m\rho^2} \implies \vartheta(t) = \int_0^t \frac{L}{m\rho^2(s)} ds.$$

supposto $\vartheta_0 = 0$

In questa forma la soluzione richiede una scrittura esplicita di $\rho(s)$ che non è conveniente. Aggiungiamo e togliamo ω_1 all'integranda:

$$\vartheta(t) = \int_0^t \left(\frac{L}{m\rho^2(s)} - \omega_1 + \omega_1 \right) ds \quad \text{dove } \omega_1 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{L}{m\rho^2(s)} ds,$$

segue

$$\vartheta(t) = \omega_1 t + \int_0^t f(s) ds$$

dove f è periodica a media nulla di periodo T_0 .

Ricordiamo che il moto complessivo è periodico se il rapporto tra il periodo del moto radiale e quello associato alla pulsazione ω_1 è razionalmente proporzionale. Per studiare cosa avviene nel nostro caso, è necessario calcolare T_1 . Sappiamo che

$$\frac{2\pi}{T_1} = \omega_1 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{L}{m\rho^2(t)} dt = \frac{1}{T_0} 2 \int_0^{T_0/2} \frac{L}{m\rho^2(t)} dt,$$

effettuando la sostituzione $\rho = \rho(t)$ e ricordando che

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(\rho))},$$

si ottiene

$$\frac{2\pi}{T_1} = \frac{1}{T_0} 2 \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{L}{m\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(\rho))}},$$

da cui, eseguendo le stesse sostituzioni operate nel calcolo dell'integrale precedente si ottiene

$$\frac{T_0}{T_1} = 1.$$

Rapporto dei periodi

5.3 MOTO COMPLESSIVO

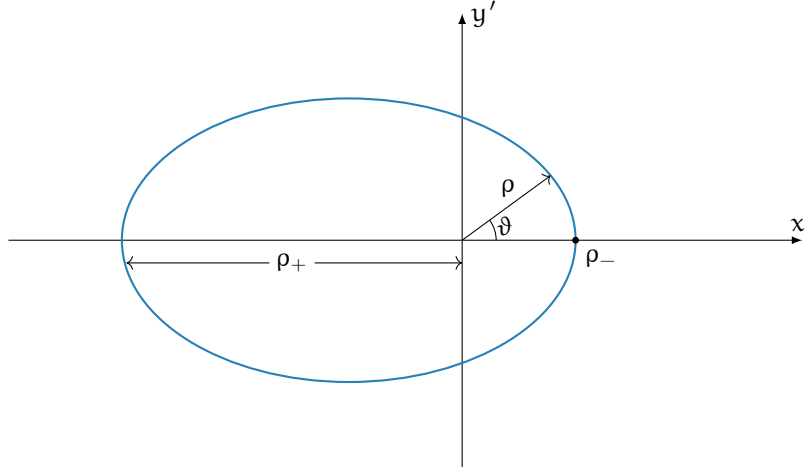
Scegliamo come dati iniziali del moto

$$\rho(0) = \rho_- \quad \text{e} \quad \vartheta(0) = 0.$$

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che il periodo del moto angolare coincide con quello del moto radiale, pertanto

$$\rho\left(\frac{T_0}{2}\right) = \rho_+ \quad \text{e} \quad \vartheta\left(\frac{T_0}{2}\right) = \pi.$$

Il grafico qualitativo del moto complessivo sarà pertanto



Vorremmo mostrare che tale moto formi un'ellisse. Osserviamo che in questo caso è possibile scrivere $\rho = \rho(\vartheta)$, in quanto

$$\dot{\vartheta} = \frac{L}{m\rho^2} > 0,$$

per cui $\vartheta(t)$ è strettamente crescente e di conseguenza invertibile. Scrivendo $t = \vartheta(t)$ è quindi possibile ottenere una scrittura di $\rho(\vartheta)$. Ad esempio si potrebbe osservare

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = \frac{\dot{\rho}}{\dot{\vartheta}} = \pm \frac{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(\rho))}}{\frac{L}{m\rho^2}} \implies d\vartheta = \pm \frac{L d\rho}{m\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(\rho))}}$$

ma il calcolo risulterebbe poco agevole. Procediamo in modo alternativo: definiamo

$$u(\vartheta) = \frac{1}{\rho(\vartheta)}$$

e calcoliamone derivata seconda.

$$\text{dove } \rho^2(\vartheta)\dot{\vartheta} = \frac{L}{m} \quad \frac{d}{d\vartheta}u(\vartheta) = -\frac{1}{\rho^2(\vartheta)} \frac{d\rho}{d\vartheta} = -\frac{1}{\rho^2(\vartheta)} \frac{\dot{\rho}}{\dot{\vartheta}} = -\frac{m}{L} \dot{\rho};$$

da cui

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2}u(\vartheta) = -\frac{m}{L} \frac{d}{d\vartheta} \dot{\rho}(t) = -\frac{m}{L} \frac{d}{d\vartheta} \dot{\rho}(t(\vartheta)) = -\frac{m}{L} \ddot{\rho} \frac{dt(\vartheta)}{d\vartheta},$$

osservando che

$$\frac{dt(\vartheta)}{d\vartheta} = \frac{d\vartheta^{-1}(t)}{d\vartheta} = \frac{1}{\dot{\vartheta}} \quad \text{e} \quad m\ddot{\rho} = -V'_{\text{eff}}(\rho),$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\vartheta^2}u(\vartheta) &= \frac{V'_{\text{eff}}(\rho)}{L\dot{\vartheta}} = \frac{V'_{\text{eff}}(\rho)}{\frac{L^2}{m\rho^2}} = \frac{m\rho^2}{L^2} \left(\frac{k}{\rho^2} - \frac{L^2}{m\rho^3} \right) = \frac{mk}{L^2} - \frac{1}{\rho} \\ &= \frac{mk}{L^2} - u(\vartheta). \end{aligned}$$

Posto

$$u_0 = \frac{1}{\rho_0} = \frac{mk}{L^2} \implies \frac{d^2}{d\vartheta^2} u(\vartheta) = u_0 - u(\vartheta).$$

Questa espressione è facilmente risolvibile in quanto corrisponde all'equazione dell'oscillatore armonico, pertanto

$$u(\vartheta) = u_0 + A \cos(\vartheta + \varphi).$$

In particolare, in corrispondenza dei punti iniziali da noi scelti, avremo $\varphi = 0$ e $A > 0$, da cui

$$u(\vartheta) = u_0 + A \cos \vartheta.$$

Inoltre

$$\frac{1}{\rho_-} = u(0) = u_0 + A \quad \text{e} \quad \frac{1}{\rho_+} = u(\pi) = u_0 - A,$$

da cui

$$0 < A < u_0 \implies A = u_0 e \quad \text{con} \quad 0 < e < 1.$$

Riepilogando

$$u(\vartheta) = u_0(1 + e \cos \vartheta) \iff \frac{1}{\rho(\vartheta)} = \frac{1}{\rho_0} (1 + e \cos \vartheta),$$

quindi

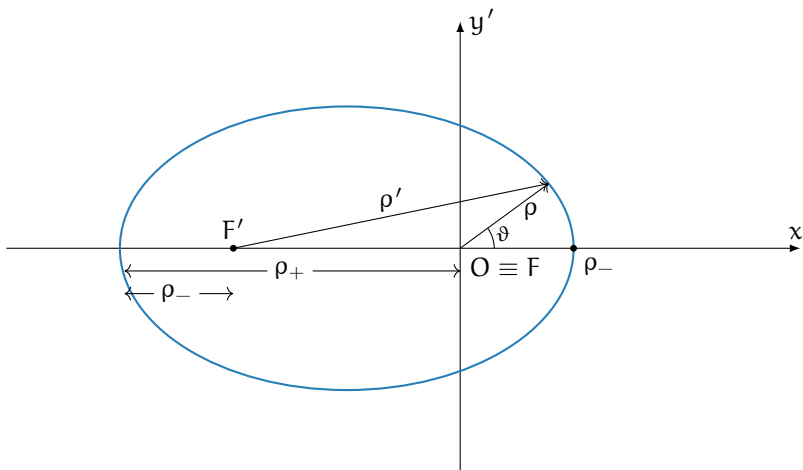
$$\rho(\vartheta) = \frac{\rho_0}{1 + e \cos \vartheta}.$$

Equazione della traiettoria

Osservazione. La costante e può essere scritta esplicitamente osservando che

$$\rho_- = \rho(0) = \frac{\rho_0}{1 + e} \quad \text{oppure} \quad \rho_+ = \rho(\pi) = \frac{\rho_0}{1 - e}$$

Mostriamo ora che l'espressione di $\rho(\vartheta)$ è quella di un'ellisse in coordinate polari di eccentricità e centrata in uno dei due fuochi:



Per verificarlo, mostriamo che la somma delle distanze ρ, ρ' dai due fuochi F, F' si mantiene costante. Per pitagora

$$\rho' = \sqrt{(|OF'| + \rho \cos \vartheta)^2 + \rho^2 \sin^2 \vartheta}.$$

Osservando che

$$F' = (-\rho_+ + \rho_-, 0) \quad \text{e} \quad \rho_+ - \rho_- = \rho_0 \left(\frac{1}{1 - e} - \frac{1}{1 + e} \right) = \frac{2e}{1 - e^2} \rho_0,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\rho' &= \sqrt{(\rho_+ - \rho_- + \rho \cos \vartheta)^2 + \rho^2 \sin^2 \vartheta} = \sqrt{\frac{4\rho_0^2 e^2}{(1-e^2)^2} + \frac{4e}{1-e^2} \rho_0 \rho(\vartheta) \cos \vartheta + \rho^2(\vartheta)} \\ &= \sqrt{\frac{4e^2}{(1-e^2)^2} \rho_0^2 + \frac{4e}{1-e^2} \rho_0^2 \frac{\cos \vartheta}{1+e \cos \vartheta} + \frac{\rho_0^2}{(1+e \cos \vartheta)^2}} \\ &= \rho_0 \sqrt{\frac{4e^2}{(1-e^2)^2} + \frac{4}{1-e^2} \frac{-1+1 \cos \vartheta}{1+e \cos \vartheta} + \frac{1}{(1+e \cos \vartheta)^2}} \\ &= \rho_0 \sqrt{\frac{4e^2}{(1-e^2)^2} + \frac{4}{1-e^2} - \frac{4}{1-e^2} \frac{1}{1+e \cos \vartheta} + \frac{1}{(1+e \cos \vartheta)^2}},\end{aligned}$$

dove

$$\frac{4e^2}{(1-e^2)^2} + \frac{4}{1-e^2} = \frac{4e^2 + 4(1-e^2)}{(1-e^2)^2} = \frac{4}{(1-e^2)^2},$$

da cui

$$\rho' = \rho_0 \sqrt{\frac{4}{(1-e^2)^2} - \frac{4}{1-e^2} \frac{1}{1+e \cos \vartheta} + \frac{1}{(1+e \cos \vartheta)^2}} = \rho_0 \left| \frac{2}{1-e^2} - \frac{1}{1+e \cos \vartheta} \right|.$$

Osserviamo che il segno del modulo è costante, infatti

$$\frac{2}{1-e^2} > \max_{\vartheta} \frac{1}{1+e \cos \vartheta} = \frac{1}{1-e} \iff \frac{2(1-e)}{(1-e)(1+e)} > 1 \iff 2 > 1+e \iff e < 1$$

che è vero per costruzione. Pertanto

$$\rho'(\vartheta) = \rho_0 \left(\frac{2}{1-e^2} - \frac{1}{1+e \cos \vartheta} \right) = \frac{2\rho_0}{1-e^2} - \rho(\vartheta),$$

ovvero

$$\rho(\vartheta) + \rho'(\vartheta) = \frac{2\rho_0}{1-e^2} = \rho_+ + \rho_- = \text{cost.}$$

Somma delle distanze dai fuochi

Quindi la traiettoria descrive un'ellisse di semiasse maggiore

$$a = \frac{\rho_+ + \rho_-}{2} = \frac{\rho_0}{1-e^2} = \frac{k}{2|E|},$$

e semiasse minore

$$b = \sqrt{\left(\frac{\rho_+ + \rho_-}{2}\right)^2 - \left(\frac{\rho_+ - \rho_-}{2}\right)^2} = \sqrt{\rho_+ \rho_-} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}.$$

5.4 LEGGI DI KEPLERO

Tramite i risultati ottenuti nei precedenti paragrafi possiamo dimostrare le tre leggi di Keplero

Teorema 5.1 – Prima legge di Keplero

Ogni pianeta, nel suo moto attorno al sole, descrive una traiettoria ellittica, con il solo coincidente con uno dei suoi due fuochi.

Dimostrazione. Vedi paragrafo precedente. □

Teorema 5.2 – Seconda legge di Keplero

Il moto di ogni pianeta si svolge sulla sua traiettoria ellittica in modo tale che la sua velocità areolare sia costante.

Dimostrazione. La velocità areolare corrisponde alla variazione di area attraversata nel tempo. Se consideriamo il vettore posizione in coordinate polari, avremo

$$\underline{r}(t) = \rho(t) \begin{pmatrix} \cos \vartheta(t) \\ \sin \vartheta(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{r}(t + dt) = \rho(t + dt) \begin{pmatrix} \cos \vartheta(t + dt) \\ \sin \vartheta(t + dt) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per cui la porzione infinitesima di area sarà data da

$$dA = \frac{1}{2} |\underline{r}(t) \wedge \underline{r}(t + dt)|.$$

Tramite la definizione di differenziale avremo

$$\underline{r}(t + dt) = \underline{r}(t) + \dot{\underline{r}}(t) dt = \rho \hat{e}_r + dt (\dot{\rho} \hat{e}_r + \rho \dot{\vartheta} \hat{e}_t),$$

dove abbiamo trascurato gli infinitesimi di ordine superiore. Per cui

$$dA = \frac{1}{2} |\rho \hat{e}_r \wedge (\rho \hat{e}_r + \dot{\rho} dt \hat{e}_r + \rho \dot{\vartheta} dt \hat{e}_t)| = \frac{1}{2} |\rho^2 \dot{\vartheta} dt \hat{L}| = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\vartheta} dt.$$

Quindi la velocità areolare sarà

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\rho^2 d\vartheta}{dt} = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\vartheta} = \frac{1}{2m} L,$$

che è costante □

Teorema 5.3 – Terza legge di Keplero

Il periodo di rivoluzione del pianeta attorno al sole è proporzionale al semiasse maggiore della traiettoria ellittica. In particolare

$$T^2 \propto a^3.$$

Dimostrazione. Nei paragrafi precedenti abbiamo fornito una scrittura esplicita sia per il periodo che per il semiasse maggiore, in particolare

$$T = \pi \sqrt{\frac{2m}{|E|} \frac{k}{2|E|}} \quad \text{e} \quad a = \frac{k}{2|E|}.$$

Da cui

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{\pi^2 k^2 m}{2|E|^3} \frac{8|E|^3}{k^3} = 4\pi^2 \frac{m}{k}.$$

Ricordando inoltre

$$k = G M_S m_P \quad \text{e} \quad m = \frac{M_S m_P}{M_S + m_P} \simeq m_P,$$

avremo infine

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{m}{k} \simeq 4\pi^2 \frac{m_P}{G M_S m_P} = \frac{4\pi^2}{G M_S}. \quad \square$$

Parte III

Meccanica Lagrangiana

6 | CALCOLO DELLE VARIAZIONI E INTRODUZIONE ALLA MECCANICA LAGRANGIANA

La meccanica Lagrangiana nasce con l'intento di stabilire se le soluzioni del sistema

$$M \ddot{\underline{R}} = -\frac{\partial U}{\partial \underline{R}}(\underline{R})$$

soddisfano un principio di massimo/minimo/stazionarietà. L'approccio che ne deriva, risulta particolarmente utile per lo studio di sistemi di punti materiali sottoposti a vincoli.

Nonostante la trattazione si possa affrontare nella piena generalità attraverso il sistema scritto sopra, per semplicità, i concetti che introdurremo più avanti saranno descritti dal punto di vista di un singolo corpo in \mathbb{R}^3 . In particolare, l'equazione del moto sarà

$$m \ddot{\underline{x}} = -\frac{\partial U}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) \quad \text{con } \underline{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (\star)$$

6.1 SPAZIO DEI MOTI

Definizione 6.1 – Punto materiale animato da un moto

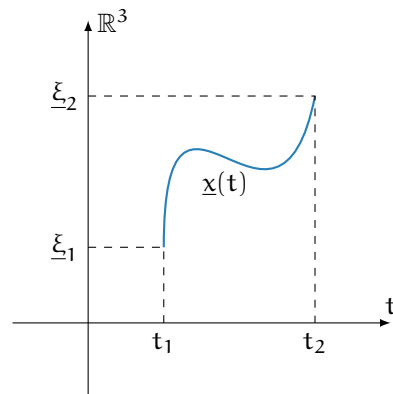
Dato un punto materiale di massa m , diremo che è *animato da un moto* $\underline{x}(t)$, se $\underline{x}(t)$ è la sua legge oraria.

Definizione 6.2 – Spazio dei moti

Definiamo lo *spazio di tutti i possibili moti* di tempo iniziale e finale t_1, t_2 e di corrispondenti dati iniziali e finali $\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2$ come

$$\mathcal{M}_{t_1, t_2}(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2) = \{ \underline{x}(t) \in C^\infty([t_1, t_2], \mathbb{R}^3) \mid \underline{x}(t_1) = \underline{\xi}_1, \underline{x}(t_2) = \underline{\xi}_2 \}.$$

Osservazione. $\mathcal{M}_{t_1, t_2}(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2)$ è uno spazio vettoriale. La generica $\underline{x}(t) \in \mathcal{M}_{t_1, t_2}(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2)$ sarà del tipo



Come specificato nella definizione, lo spazio dei moti è l'insieme di tutti i possibili

moti, d'altronde solo alcuni di essi corrispondono a moti reali.

Definizione 6.3 – Densità lagrangiana

In un sistema meccanico, definiamo la generica *densità lagrangiana* come una mappa

$$\mathcal{L}: \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}, (\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) \longmapsto \mathcal{L}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t))$$

di classe C^∞

Notazione. Spesso si fa riferimento alla densità lagrangiana solo con il termine *lagrangiana*.

Osservazione. Nel caso dell'equazione (\star), la densità lagrangiana di interesse è

$$\mathcal{L}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) = \frac{m}{2} |\underline{\eta}|^2 - U(\underline{\xi}).$$

Definizione 6.4 – Funzionale d'azione

Dato un sistema meccanico con lagrangiana \mathcal{L} , definiamo *funzionale d'azione* la mappa

$$A: \mathcal{M}_{t_1, t_2}(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2) \longrightarrow \mathbb{R} \quad A[\underline{x}] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) dt.$$

Notazione. Le parentesi quadre nell'espressione di $A[\underline{x}]$, servono per ricordare che \underline{x} non è una variabile ma identifica l'intera traiettoria.

Definizione 6.5 – Variazione di una traiettoria

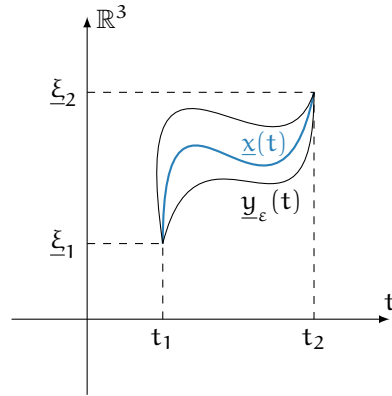
Data $\underline{x} \in \mathcal{M}_{t_1, t_2}(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2)$, diremo che la funzione $\underline{y}(\varepsilon, t) \equiv \underline{y}_\varepsilon(t)$ è una *variazione di \underline{x}* , se

- \underline{y} è C^∞ nei suoi argomenti su $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times [t_1, t_2]$.
- Per ogni ε fissato in $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ si ha $\underline{y}_\varepsilon(t) \in \mathcal{M}_{t_1, t_2}(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2)$.
- Per $\varepsilon = 0$, \underline{y} coincide con \underline{x} , ovvero $\underline{y}_0(t) \equiv \underline{x}(t)$.

Notazione. Il parametro ε di \underline{y} è detto *parametro di deformazione*.

Osservazione. La grandezza di ε identifica quanto $\underline{y}_\varepsilon$ si discosta da \underline{x} . Come visibile

dal grafico in figura:



Osservazione. Dato che $\underline{y}(\varepsilon, t)$ è di classe C^∞ in ε , possiamo svilupparlo in serie di Taylor attorno ad $\varepsilon = 0$, in particolare osserveremo

$$\underline{y}(\varepsilon, t) = \underline{x}(t) + \varepsilon \underline{z}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \text{dove } \underline{z}(t) = \left. \frac{\partial \underline{y}_\varepsilon(t)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$$

Inoltre, dato che per costruzione $\underline{y}(\varepsilon, t_1) = \underline{\xi}_1$ e $\underline{y}(\varepsilon, t_2) = \underline{\xi}_2$, avremo

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \underline{y}(\varepsilon, t_1) = \underline{0} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \underline{y}(\varepsilon, t_2) = \underline{0}.$$

per cui $\underline{z}(t_1) = \underline{z}(t_2) = \underline{0}$ e quindi $\underline{z} \in \mathcal{M}_{t_1, t_2}(\underline{0}, \underline{0}) \equiv \mathcal{M}_{t_1, t_2}^0$.

Definizione 6.6 – Spazio delle variazioni

Dato un moto $\underline{x} \in \mathcal{M}_{t_1, t_2}(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2)$ se ne definisce lo *spazio delle variazioni* sul suo spazio dei moti come l'insieme delle variazioni di \underline{x} e si scrive

$$\mathcal{V}_{\underline{x}}(\mathcal{M}_{t_1, t_2}(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2)).$$

Notazione. Quanto non vi sono ambiguità sulla scelta dello spazio dei moti, scriveremo $\mathcal{V}_{\underline{x}}$ per indicare $\mathcal{V}_{\underline{x}}(\mathcal{M}_{t_1, t_2}(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2))$.

Definizione 6.7 – Punto di stazionarietà del funzionale d'azione

Una traiettoria $\underline{x} \in \mathcal{M}_{t_1, t_2}(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2)$ si definisce *punto di stazionarietà* del funzionale d'azione $A[\underline{x}]$ se

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} A[\underline{y}_\varepsilon] \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \text{per ogni } \underline{y} \in \mathcal{V}_{\underline{x}}.$$

Osservazione. Talvolta può essere conveniente considerare le variazioni su un sottospazio $M \subseteq \mathcal{M}_{t_1, t_2}(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2)$ quando $\underline{x} \in M$. Tale sottospazio risulterà essere lo spazio di tutte le traiettorie possibili con qualche vincolo.

In questo caso la definizione di stazionarietà è del tutto analoga, in particolare diremo

che A è stazionaria in $\underline{x} \in M$ rispetto a variazioni in M se

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} A[\underline{y}_\varepsilon] \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \text{per ogni } \underline{y} \in \mathcal{V}_{\underline{x}}(M) = \left\{ \underline{y} \in \mathcal{V}_{\underline{x}} \mid \underline{y}_\varepsilon(t) \in M \right\}.$$

6.2 EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono molto importanti in meccanica Lagrangiana poiché, come vedremo in questo paragrafo, le loro soluzioni sono punti stazionari del funzionale. Cominciamo con l'osservare a cosa corrisponde, in formule, la condizione di stazionarietà per $A[\underline{x}]$. Ricordiamo che per definizione si deve avere

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} A[\underline{y}_\varepsilon] \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \forall \underline{y}_\varepsilon \in \mathcal{V}_{\underline{x}}.$$

Scriviamo esplicitamente la derivata:

$$\frac{d}{d\varepsilon} A[\underline{y}_\varepsilon] = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\underline{y}_\varepsilon(t), \dot{\underline{y}}_\varepsilon(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{L}(\underline{y}_\varepsilon(t), \dot{\underline{y}}_\varepsilon(t)) dt,$$

dove ho potuto portare dentro la derivata in quanto \mathcal{L} è di classe C^∞ e pertanto continua. Ora

$$\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{L}(\underline{y}_\varepsilon(t), \dot{\underline{y}}_\varepsilon(t)) = \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \mathcal{L}(\underline{y}_\varepsilon(t), \dot{\underline{y}}_\varepsilon(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \underline{y}_\varepsilon(t) + \frac{\partial}{\partial \underline{\eta}} \mathcal{L}(\underline{y}_\varepsilon(t), \dot{\underline{y}}_\varepsilon(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \dot{\underline{y}}_\varepsilon(t).$$

Da cui

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} A[\underline{x}] \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \mathcal{L}(\underline{y}_\varepsilon(t), \dot{\underline{y}}_\varepsilon(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \underline{y}_\varepsilon(t) + \frac{\partial}{\partial \underline{\eta}} \mathcal{L}(\underline{y}_\varepsilon(t), \dot{\underline{y}}_\varepsilon(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \dot{\underline{y}}_\varepsilon(t) \right] dt \Big|_{\varepsilon=0}$$

Avevamo osservato in precedenza come fosse possibile sviluppare \underline{y} in serie di Taylor attorno a $\varepsilon = 0$, in particolare

$$\underline{y}_\varepsilon(t) = \underline{x}(t) + \varepsilon \underline{z}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \text{e} \quad \dot{\underline{y}}_\varepsilon(t) = \dot{\underline{x}}(t) + \varepsilon \dot{\underline{z}}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

da cui

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \underline{y}_\varepsilon(t) \right|_{\varepsilon=0} = \underline{z}(t) \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \dot{\underline{y}}_\varepsilon(t) \right|_{\varepsilon=0} = \dot{\underline{z}}(t).$$

Ne segue

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} A[\underline{x}] \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \mathcal{L}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) \cdot \underline{z}(t) + \frac{\partial}{\partial \underline{\eta}} \mathcal{L}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) \cdot \dot{\underline{z}}(t) \right] dt.$$

In prima conclusione, avremo quindi che A è stazionaria in \underline{x} rispetto a variazioni di $\underline{y} \in \mathcal{V}_{\underline{x}}$ se e soltanto se

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \mathcal{L}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) \cdot \underline{z}(t) + \frac{\partial}{\partial \underline{\eta}} \mathcal{L}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) \cdot \dot{\underline{z}}(t) \right] dt = 0, \quad \forall \underline{z} \in \mathcal{M}_{t_1, t_2}^0.$$

Cerchiamo ora di manipolare l'integrale integrando per parti la seconda parte dell'integranda:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial \underline{\eta}} \mathcal{L}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) \cdot \dot{\underline{z}}(t) dt &= \frac{\partial}{\partial \underline{\eta}} \mathcal{L}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) \cdot \underline{z}(t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\eta}}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) \right) \cdot \underline{z}(t) dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\eta}}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) \right) \cdot \underline{z}(t) dt \end{aligned}$$

in quanto $\underline{z}(t_1) = \underline{z}(t_2) = \underline{0}$. Pertanto A è stazionario in \underline{x} , rispetto a variazioni $\underline{y} \in \mathcal{V}_{\underline{x}}$, se e soltanto se

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\xi}}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\eta}}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) \right] \cdot \underline{z}(t) dt = 0, \quad \forall \underline{z} \in \mathcal{M}_{t_1, t_2}^0.$$

Questa scrittura favorisce la seguente definizione

Definizione 6.8 – Equazioni di Eulero-Lagrange

Si definiscono le *equazioni di Eulero-Lagrange* per la lagrangiana \mathcal{L} come

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\xi}}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\eta}}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t))$$

Teorema 6.9 – Caratterizzazione della stazionarietà del funzionale

Il funzionale A è stazionario in \underline{x} rispetto a variazioni $\underline{y} \in \mathcal{V}_{\underline{x}}$ se e soltanto se sono soddisfatte le equazioni di Eulero-Lagrange.

Dimostrazione. Dalla precedente caratterizzazione della stazionarietà di A :

\Leftrightarrow

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\xi}}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\eta}}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) \right] \cdot \underline{z}(t) dt = 0, \forall \underline{z} \in \mathcal{M}_{t_1, t_2}^0,$$

segue immediatamente che le equazioni di Eulero-Lagrange sono condizione sufficiente per la stazionarietà.

Supponiamo per assurdo che

\Rightarrow

$$\underline{\varphi}(t) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\xi}}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\eta}}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t))$$

non sia identicamente nulla. Allora esiste $\bar{t} \in (t_1, t_2)$ tale che $\underline{\varphi}(\bar{t}) \neq \underline{0}$. In tal caso possiamo facilmente esibire una $\underline{z} \in \mathcal{M}_{t_1, t_2}^0$ tale che

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{\varphi}(t) \cdot \underline{z}(t) dt \neq 0$$

che negherebbe l'ipotesi di stazionarietà di A . Esplicitamente prendiamo $\underline{z}(t) = \underline{\varphi}(\bar{t})\alpha(t)$ con $\alpha(t)$ una funzione da definire tale che $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = 0$. La condizione di stazionarietà diventa

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{\varphi}(t) \cdot \underline{z}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \underline{\varphi}(t) \cdot \underline{\varphi}(\bar{t})\alpha(t) dt.$$

Scelgo $\alpha: [t_1, t_2] \rightarrow [0, +\infty)$ con $\alpha(t) \neq 0$ solo in un opportuno intorno di \bar{t} . Osserviamo ora che

$$\underline{\varphi}(t) \cdot \underline{\varphi}(\bar{t}) \Big|_{t=\bar{t}} = |\underline{\varphi}(\bar{t})|^2 > 0.$$

Per la permanenza del segno applicata a $\underline{\varphi}$ continua, esiste un intorno I di \bar{t} su cui

$$\underline{\varphi}(t) \cdot \underline{\varphi}(\bar{t}) \geq \frac{|\underline{\varphi}(\bar{t})|^2}{2} > 0.$$

Ora se $\alpha(t)$ è diversa da zero solo su I , allora

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{\varphi}(t) \cdot \underline{\varphi}(\bar{t})\alpha(t) dt \geq \frac{|\underline{\varphi}(\bar{t})|^2}{2} \int_{t_1}^{t_2} \alpha(t) dt > 0,$$

in quanto

$$\int_I \alpha(t) dt > 0.$$

Ciò è assurdo per l'ipotesi di stazionarietà. Da cui la tesi. \square

Osservazione. Se $\mathcal{L}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) = \frac{1}{2} m |\underline{\eta}|^2 - U(\underline{\xi})$, avremo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\xi}} = -\frac{\partial U}{\partial \underline{\xi}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\eta}} = m \underline{\eta}.$$

Quindi le equazioni di Eulero-Lagrange diventano

$$-\frac{\partial U}{\partial \underline{\xi}}(\underline{x}(t)) = \frac{d}{dt} m \dot{\underline{x}}(t) = m \ddot{\underline{x}}(t).$$

6.3 PRINCIPIO DI MINIMA AZIONE

Teorema 6.10 – Soluzioni del moto sono minimi delle variazioni

Sia $\underline{x}_0(t) \in \mathcal{M}_{t_1, t_2}(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2)$ soluzione dell'equazione del moto. Allora \underline{x}_0 è un minimo locale delle variazioni, ovvero

$$\exists \delta > 0 : \forall I = [\vartheta_1, \vartheta_2] \subseteq [t_1, t_2] \quad \text{con } \vartheta_2 - \vartheta_1 \leq \delta,$$

tale che \underline{x}_0 è un minimo per l'azione ristretta ad I:

$$A[\underline{x}] = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \mathcal{L}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) dt.$$

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che $A[\underline{y}(\varepsilon, t)] \Big|_I$ ammette minimo in $\varepsilon = 0$ per ogni $\underline{y} \in \mathcal{M}$. Per farlo è sufficiente verificare che la derivata prima è nulla e la derivata seconda è positiva. Abbiamo già fornito una caratterizzazione della stazionarietà, procediamo quindi con il calcolo della derivata seconda. Nel sistema meccanico del singolo corpo (*) abbiamo osservato che l'espressione della lagrangiana corrisponde a

$$\mathcal{L}(\underline{y}, \dot{\underline{y}}) = \frac{m}{2} |\dot{\underline{y}}|^2 - U(\underline{y}).$$

Pertanto

$$\frac{d}{d\varepsilon} A[\underline{y}_\varepsilon] \Big|_I = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left(\frac{m}{2} |\dot{\underline{y}}|^2 - U(\underline{y}) \right) dt.$$

Ora

$$\frac{d}{d\varepsilon} \frac{m}{2} |\dot{\underline{y}}|^2 = m |\dot{\underline{y}}| \frac{\dot{\underline{y}}}{|\dot{\underline{y}}|} \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \dot{\underline{y}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \dot{\underline{y}} \cdot m \dot{\underline{y}},$$

e

$$\frac{d}{d\varepsilon} U(\underline{y}) = \frac{\partial}{\partial \underline{x}} U(\underline{y}) \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \underline{y}.$$

Quindi

$$\frac{d}{d\varepsilon} A[\underline{y}_\varepsilon] \Big|_I = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \dot{\underline{y}} \cdot m \dot{\underline{y}} - \frac{\partial}{\partial \underline{x}} U(\underline{y}) \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \underline{y} \right) dt.$$

Per ottenere la derivata seconda dobbiamo derivare nuovamente l'integranda. In particolare

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \dot{\underline{y}} \cdot m \dot{\underline{y}} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \dot{\underline{y}} \cdot m \dot{\underline{y}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \dot{\underline{y}} \cdot m \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \dot{\underline{y}},$$

e

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} U(\underline{y}) \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \underline{y} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \underline{x} \partial \underline{x}} U(\underline{y}) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \underline{y} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \underline{y} + \frac{\partial}{\partial \underline{x}} U(\underline{y}) \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \underline{y},$$

dove, per chiarezza di notazione, indichiamo

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \underline{x} \partial \underline{x}} \mathbf{U}(\underline{y}) \frac{\partial}{\partial \underline{\varepsilon} \underline{y}} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{\varepsilon}} \underline{y} = \sum_{i,j}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{U}(\underline{y}) \frac{\partial}{\partial \underline{\varepsilon}} y_i \frac{\partial}{\partial \underline{\varepsilon}} y_j.$$

Quindi avremo la derivata seconda di $A[\underline{y}_\varepsilon]$ ristretta ad I come

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \dot{\underline{y}} \cdot m \dot{\underline{y}} + \frac{\partial}{\partial \underline{\varepsilon}} \dot{\underline{y}} \cdot m \frac{\partial}{\partial \underline{\varepsilon}} \dot{\underline{y}} - \left(\frac{\partial^2}{\partial \underline{x} \partial \underline{x}} \mathbf{U}(\underline{y}) \frac{\partial}{\partial \underline{\varepsilon}} \underline{y} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{\varepsilon}} \underline{y} - \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \mathbf{U}(\underline{y}) \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \underline{y} \right] dt$$

Sviluppando $\underline{y}_\varepsilon$ con Taylor attorno a $\varepsilon = 0$, fino al secondo ordine, otteniamo

$$\underline{y}_\varepsilon(t) = \underline{x}_0(t) + \varepsilon \underline{z}_0(t) + \frac{\varepsilon^2}{2} \underline{w}_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\varepsilon}} \underline{y} = \underline{z}_0 + \varepsilon \underline{w}_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \underline{y} = \underline{w}_0 + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Calcolando in $\varepsilon = 0$ avremo

$$\underline{y}(0, t) = \underline{x}_0(t); \quad \frac{\partial}{\partial \underline{\varepsilon}} \underline{y}(0, t) = \underline{z}_0(t); \quad \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \underline{y}(0, t) = \underline{w}_0(t).$$

Sostituendo tutto nella derivata seconda di A ristretta ad I e calcolata in $\varepsilon = 0$, otteniamo

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left[\dot{\underline{w}}_0 \cdot m \dot{\underline{x}}_0 + \dot{\underline{z}}_0 \cdot m \dot{\underline{z}}_0 - \left(\frac{\partial^2}{\partial \underline{x} \partial \underline{x}} \mathbf{U}(\underline{x}_0) \underline{z}_0 \right) \cdot \underline{z}_0 - \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \mathbf{U}(\underline{x}_0) \cdot \underline{w}_0 \right] dt.$$

Affinché la tesi sia vera, dobbiamo verificare che tale derivata seconda sia positiva. Consideriamo il primo e il quarto addendo dell'integranda e integriamo per parti il primo addendo:

$$\begin{aligned} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left(\dot{\underline{w}}_0 \cdot m \dot{\underline{x}}_0 - \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \mathbf{U}(\underline{x}_0) \cdot \underline{w}_0 \right) dt &= \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \dot{\underline{w}}_0 \cdot m \dot{\underline{x}}_0 dt - \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \mathbf{U}(\underline{x}_0) \cdot \underline{w}_0 dt = \underline{w}_0 \cdot m \dot{\underline{x}}_0 \Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \\ &\quad - \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \underline{w}_0 \cdot m \ddot{\underline{x}}_0 dt - \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \mathbf{U}(\underline{x}_0) \cdot \underline{w}_0 dt \\ &= \underline{w}_0 \cdot m \dot{\underline{x}}_0 \Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} - \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \underline{w}_0 \cdot \left(m \ddot{\underline{x}}_0 + \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \mathbf{U}(\underline{x}_0) \right) dt \\ &= 0, \end{aligned}$$

dove il primo termine è nullo in quanto $\underline{w}_0 \in \mathcal{M}_{\vartheta_1, \vartheta_2}^0$, mentre il secondo termine è nullo poiché \underline{x}_0 risolve l'equazione di Newton, che pertanto annulla l'integranda. Restano da stimare i due addendi rimasti:

$$\dot{\underline{z}}_0 \cdot m \dot{\underline{z}}_0 = m |\dot{\underline{z}}_0|^2.$$

L'ultimo addendo rimasto, è una forma quadratica con l'hessiano di \mathbf{U} , che è simmetrico, diagonalizzabile e pertanto con autovalori reali:

$$\underline{z}_0 \cdot \mathbf{H}(\underline{x}_0) \underline{z}_0 \leq |\underline{z}_0|^2 \mathbf{K} \quad \text{con } \mathbf{K} = \max_i \max_{t \in [\vartheta_1, \vartheta_2]} |\lambda_i(\underline{x}_0)|$$

Tramite il TFC stimiamo \underline{z}_0 e $|\underline{z}_0|^2$:

$$\underline{z}_0 = \underline{z}_0(\vartheta_1) + \int_{\vartheta_1}^t \dot{\underline{z}}_0(s) ds \leq \underbrace{\underline{z}_0(\vartheta_1)}_{=0} + \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \dot{\underline{z}}_0(s) ds = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \dot{\underline{z}}_0(s) ds$$

Da cui, usando Cauchy-Schwartz, otteniamo

$$\begin{aligned} |\underline{z}_0|^2 &\leq \left| \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \dot{\underline{z}}_0 dt \right|^2 \leq \left(\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} |\dot{\underline{z}}_0| dt \right)^2 \stackrel{C-S}{\leq} \|\dot{\underline{z}}_0\|_2^2 (\sqrt{\vartheta_2 - \vartheta_1})^2 \\ &= \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} |\dot{\underline{z}}_0(s)|^2 ds (\vartheta_2 - \vartheta_1). \end{aligned}$$

Riepilogando

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} A \right|_{\varepsilon=0} &\geq m \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} |\dot{z}_0|^2 dt - K \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} (\vartheta_2 - \vartheta_1) \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} |\dot{z}_0(s)|^2 ds dt \\ &= m \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} |\dot{z}_0|^2 dt - K (\vartheta_2 - \vartheta_1)^2 \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} |\dot{z}_0(s)|^2 ds \\ &= [m - K (\vartheta_2 - \vartheta_1)^2] \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} |\dot{z}_0|^2 dt \end{aligned}$$

che è positivo purché

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 \leq \sqrt{\frac{m}{K}} = \delta, \forall \underline{y}_\varepsilon \in \mathcal{V}_{\underline{x}}. \quad \square$$

6.4 INVARIANZA DEL PRINCIPIO DI STAZIONARIETÀ

La condizione di stazionarietà per $A_{t_1, t_2}^{\mathcal{L}}$, descritta attraverso il formalismo Lagrangiano, è una condizione intrinseca, ovvero indipendente dal sistema di coordinate utilizzato. Diremo pertanto che è *invariante* rispetto al cambiamento di coordinate e che, analogamente, le equazioni di Eulero-Lagrange ne sono *covarianti*. Questo comportamento giustifica in parte l'utilizzo di tale formalismo, infatti ciò non accade per le equazioni di Newton.

Mostriamo formalmente la covarianza delle equazioni di Eulero-Lagrange: Sia

$$\underline{\gamma}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ invertibile localmente} \quad \text{e} \quad \underline{\phi} = \underline{\gamma}^{-1}$$

e supponiamo di avere il seguente cambio di coordinate associato a tali funzioni

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{q}) \longleftrightarrow \underline{q} = \underline{\gamma}(\underline{x}).$$

Ogni moto $\underline{x}(t)$ può pertanto essere letto come un moto $\underline{q}(t)$ attraverso $\underline{x}(t) = \underline{\phi}(\underline{q}(t))$. Per cui

$$\dot{\underline{x}}(t) = \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{q}}(\underline{q}(t)) \dot{\underline{q}}(t).$$

Quindi

$$\mathcal{L}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) = \mathcal{L}\left(\underline{\phi}(\underline{q}(t)), \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{q}}(\underline{q}(t)) \dot{\underline{q}}(t)\right) \equiv \tilde{\mathcal{L}}(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t)).$$

Cambiamento di variabile per le equazioni di E-L

A questo punto avremo

$$A_{t_1, t_2}^{\mathcal{L}}[\underline{x}] = A_{t_1, t_2}^{\tilde{\mathcal{L}}}[\underline{q}] \quad \text{con} \quad \underline{x}(t) = \underline{\phi}(\underline{q}(t))$$

con $\underline{x}(t)$ che rende stazionaria $A \equiv A_{t_1, t_2}^{\mathcal{L}}$ se e solo se $\underline{q}(t) = \underline{\gamma}(\underline{x}(t))$ rende stazionaria $\tilde{A} \equiv A_{t_1, t_2}^{\tilde{\mathcal{L}}}$. Inoltre, poiché ciò accade se e solo se sono verificate le equazioni di Eulero-Lagrange, segue la covarianza:

$\underline{x}(t) \in \mathcal{M}_{t_1, t_2}(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2)$ è soluzione di

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underline{x}}}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t))$$

se e soltanto se $\underline{q}(t) = \underline{\gamma}(\underline{x}(t)) \in \mathcal{M}_{t_1, t_2}(\underline{\gamma}(\underline{\xi}_1), \underline{\gamma}(\underline{\xi}_2))$ è soluzione di

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\underline{q}}}(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t)) = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \underline{q}}(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t)).$$

Covarianza delle equazioni di Eulero-Lagrange

Questo comportamento non si ripete per le equazioni di Newton. Consideriamo la lagrangiana meccanica

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}) = \frac{1}{2} \dot{\underline{x}} \cdot \mathbf{M} \dot{\underline{x}} - \mathbf{U}(\underline{x}).$$

Se $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{q})$, abbiamo già osservato che

$$\dot{\underline{x}} = \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{q}}(\underline{q}) \dot{\underline{q}},$$

quindi

$$\tilde{\mathcal{L}}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{q}}(\underline{q}) \dot{\underline{q}} \right] \cdot \mathbf{M} \left[\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{q}}(\underline{q}) \dot{\underline{q}} \right] - \mathbf{U}(\underline{\phi}(\underline{q})).$$

In coordinate

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j}(\underline{q}) \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n J_{ij}(\underline{q}) \dot{q}_j \implies \dot{\underline{x}} = \mathbf{J}(\underline{q}) \dot{\underline{q}},$$

dove con \mathbf{J} indichiamo lo Jacobiano di $\underline{\phi}$. Quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{q}}(\underline{q}) \dot{\underline{q}} \right] \cdot \mathbf{M} \left[\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{q}}(\underline{q}) \dot{\underline{q}} \right] &= \frac{1}{2} [\mathbf{J}(\underline{q}) \dot{\underline{q}}] \cdot \mathbf{M} [\mathbf{J}(\underline{q}) \dot{\underline{q}}] = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} [\mathbf{J}_{ij}(\underline{q}) \dot{q}_j] \mathcal{M}_{ii} [\mathbf{J}_{ik}(\underline{q}) \dot{q}_k] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} \dot{q}_j \sum_i \left[\left({}^t \mathbf{J}(\underline{q}) \right)_{ji} \mathcal{M}_{ii} \mathbf{J}_{ik}(\underline{q}) \right] \dot{q}_k \\ &= \frac{1}{2} \dot{\underline{q}} \cdot \left[{}^t \mathbf{J}(\underline{q}) \mathbf{M} \mathbf{J}(\underline{q}) \right] \dot{\underline{q}}, \end{aligned}$$

da cui

$$\tilde{\mathcal{L}}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}} \cdot \left[{}^t \mathbf{J}(\underline{q}) \mathbf{M} \mathbf{J}(\underline{q}) \right] \dot{\underline{q}} - \mathbf{U}(\underline{\phi}(\underline{q})) = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}} \cdot \tilde{\mathbf{M}}(\underline{q}) \dot{\underline{q}} - \mathbf{U}(\underline{\phi}(\underline{q})).$$

Le equazioni di Newton diventano pertanto

$$\frac{d}{dt} \left(\tilde{\mathbf{M}}(\underline{q}) \dot{\underline{q}} \right) = - \frac{\partial}{\partial \underline{q}} \mathbf{U}(\underline{\phi}(\underline{q})) + \frac{1}{2} \dot{\underline{q}} \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}}{\partial \underline{q}} \dot{\underline{q}}$$

che non ha la struttura delle equazioni di Newton. Infatti sviluppando il primo membro si ottiene un termine che dipende dalla variazione di $\tilde{\mathbf{M}}$ che non appare nella scrittura originale.

Osservazione. Aggiungendo la dipendenza dal tempo si ottiene lo stesso risultato:

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t) \longleftrightarrow \tilde{\mathcal{L}}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = \mathcal{L} \left(\underline{\phi}(\underline{q}, t), \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{q}}(\underline{q}, t) \dot{\underline{q}} + \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t}(\underline{q}, t), t \right).$$

7 | MOTI VINCOLATI

7.1 INTRODUZIONE

Definizione 7.1 – Moto soggetto ad un vincolo

Diremo che il moto \underline{x} , sotto l'effetto di \underline{F} , è *soggetto ad un vincolo* Σ , se partendo su Σ il moto generato da \underline{F} su Σ vi rimane per tutti i tempi.

Esempio. Abbiamo già visto un esempio di moto vincolato con il pendolo in cui si aveva

$$\underline{x} \in \Sigma \subseteq \mathbb{R}^2 \quad \text{dove } \Sigma = \{ \underline{x} : |\underline{x}| = l \}.$$

Nel contesto dei moti vincolati è conveniente studiare il sistema con coordinate adattate al vincolo. Supponiamo che Σ sia descritta in forma parametrica

$$\underline{x} = \varphi(q_1, \dots, q_s),$$

dove s è la dimensione di Σ

Esempio. Nel caso del pendolo avevamo

$$\underline{x} = l \begin{pmatrix} \sin \vartheta \\ -\cos \vartheta \end{pmatrix} \equiv \varphi(\vartheta).$$

Sappiamo che moti reali rendono stazionaria l'azione $A_{t_1, t_2}^{\mathcal{L}}$. Sappiamo inoltre che moti che partono su Σ si mantengono su Σ . Pertanto moti reali su Σ renderanno, a maggior ragione, stazionaria l'azione di $A_{t_1, t_2}^{\mathcal{L}}$ rispetto all'azione sull'insieme ristretto dei moti

$$\mathcal{M}_{t_1, t_2}^{\Sigma}(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2) \quad \text{con } \underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2 \in \Sigma;$$

che è il sottoinsieme di M tale che $\underline{x}(t) \in \Sigma$ per ogni t . D'altronde

$$\underline{x}(t) \in \mathcal{M}_{t_1, t_2}^{\Sigma}(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2) \implies \underline{x}(t) = \varphi(q_1(t), \dots, q_s(t))$$

per cui su tali moti avremo

$$\mathcal{L}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) = \tilde{\mathcal{L}}(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t)),$$

dove $\tilde{\mathcal{L}}$ è definita come descritta nel capitolo precedente. In questo caso $s < n$ per cui la lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}$ sarà ridotta rispetto a \mathcal{L} .

Esempio. Considerando sempre il pendolo abbiamo

$$\underline{x}(t) = l \begin{pmatrix} \sin \vartheta(t) \\ -\cos \vartheta(t) \end{pmatrix} \implies \dot{\underline{x}}(t) = l \dot{\vartheta}(t) \begin{pmatrix} \cos \vartheta(t) \\ \sin \vartheta(t) \end{pmatrix}.$$

Inoltre $\underline{U} = m g x_2$, per cui

$$\tilde{\mathcal{L}}(\vartheta(t), \dot{\vartheta}(t)) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\vartheta}^2 + m g \cos \vartheta.$$

Possiamo quindi applicare le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \vartheta} \iff \frac{d}{dt} m l^2 \dot{\vartheta}(t) = -m g l \sin(\vartheta(t)),$$

da cui otteniamo l'equazione ridotta del moto

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l} \sin \vartheta.$$

Osserviamo che il procedimento applicato nell'esempio precedente al pendolo, ha avuto successo nonostante fossimo in presenza di forze non conservative. In generale infatti, un sistema di forze \underline{F} che mantiene \underline{x} sul vincolo non è conservativo e quanto detto non si applica. D'altronde è possibile modificare opportunamente la trattazione precedente ed assumere che la forza di vincolo sia conservativa.

Nel caso del pendolo si aveva $\underline{F} = m \underline{g} + \underline{I}$, dove

$$\underline{I} = -\hat{e}_r (m g \cos \vartheta + m l \dot{\vartheta}^2)$$

che è chiaramente non conservativa (ad esempio non è posizionale). Osserviamo che \underline{F} si decompone naturalmente in una componente conservativa e in una non conservativa ortogonale al vincolo. In particolare segue che \underline{I} non compie lavoro sui moti su Σ . Questo ci permetterà di dimostrare che tali moti sono trascurabili nella nostra trattazione.

Definizione 7.2 – Sistema di vincoli

Nella nostra trattazione avremo che, data una superficie di vincolo Σ , si ha

$$\underline{x} \in \Sigma \iff \begin{cases} G_1(\underline{x}) = 0 \\ \vdots \\ G_m(\underline{x}) = 0 \end{cases}.$$

Dove se s è la dimensione di Σ , si ha $s = n - m$.

Notazione. Vincoli che rispettano tali condizioni si definiscono *olonomi bilateri*. In particolare un vincolo olonomo è indipendente dalle velocità; mentre un vincolo bilatero è descritto da una condizione del tipo $G(\underline{x}) = 0$.

7.2 VINCOLI IDEALI

Definizione 7.3 – Sistema di vincoli regolari

Un sistema di vincoli

$$\begin{cases} G_1(\underline{x}) = 0 \\ \vdots \\ G_m(\underline{x}) = 0 \end{cases} \quad \text{con } \underline{x} \in \mathbb{R}^n, G_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),$$

si dice *regolare* se è tale che

$$\frac{\partial G_1}{\partial \underline{x}}(\underline{x}), \dots, \frac{\partial G_m}{\partial \underline{x}}(\underline{x}),$$

sono m vettori indipendenti per ogni \underline{x} che soddisfa il sistema.

Osservazione. Un vincolo regolare definito da m equazioni ha la superficie Σ di dimensione $s = n - m$.

Esempio. Nel caso del pendolo abbiamo visto che $G(\underline{x}) = |\underline{x}|^2 - l^2$, ora

$$\frac{\partial G}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) = 2\underline{x} \neq 0, \forall |\underline{x}| = l,$$

per cui il vincolo è regolare.

Teorema 7.4 – Sistema locale di coordinate adattate al vincolo

Sia Σ una superficie di vincolo associata ad un sistema di vincoli regolari. Allora Σ ammette, almeno localmente attorno ad ogni $\underline{x}_0 \in \Sigma$, un sistema di coordinate adattate al vincolo. Ovvero, se U_0 è un aperto di \mathbb{R}^n e U_1 un intorno di $\underline{x}_0 \in \Sigma$, esiste $\underline{X}: U_0 \longleftrightarrow U_1$ tale che

$$\underline{x} = \underline{X}(q_1, \dots, q_s, q_{s+1}, \dots, q_n) \in \Sigma \cap U_1 \iff q_{s+1} = \dots = q_n = 0.$$

Dimostrazione. Segue dal teorema della funzione implicita. □

Osservazione. La mappa

$$\varphi(q_1, \dots, q_s) \equiv \underline{X}(q_1, \dots, q_s, 0, \dots, 0),$$

fornisce una parametrizzazione locale di Σ in un intorno di \underline{x}_0 .

Esempio. Nel caso del pendolo $G(\underline{x}) = |\underline{x}|^2 - l^2$. Un sistema di coordinate adattate è fornito dalla seguente mappa

$$\underline{x} = \underline{X}(\vartheta, \delta) = (l + \delta) \begin{pmatrix} \sin \vartheta \\ -\cos \vartheta \end{pmatrix},$$

posto $\delta = 0$ troviamo

$$\underline{x} = l \begin{pmatrix} \sin \vartheta \\ -\cos \vartheta \end{pmatrix} \equiv \varphi(\vartheta)$$

che è una parametrizzazione, in questo caso specifico globale, del vincolo.

Definizione 7.5 – Velocità compatibile con il vincolo

Diremo che $\dot{\underline{x}}(t_0)$ è *compatibile* con il sistema di vincoli (G_1, \dots, G_m) se è tangente alla superficie di vincolo.

Osservazione. Tale definizione è naturale, infatti se $\underline{x}(t) \in \Sigma$ avremo

$$\begin{cases} G_1(\underline{x}(t)) = 0 \\ \vdots \\ G_m(\underline{x}(t)) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) \cdot \frac{\partial G_1}{\partial \underline{x}}(\underline{x}(t)) = 0 \\ \vdots \\ \dot{\underline{x}}(t) \cdot \frac{\partial G_m}{\partial \underline{x}}(\underline{x}(t)) = 0 \end{cases} \iff \dot{\underline{x}} \perp \frac{\partial G_i}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) \forall i,$$

ovvero $\dot{\underline{x}} \in T_{\underline{x}}\Sigma$, dove $T_{\underline{x}}\Sigma$ è lo spazio tangente a Σ passante per \underline{x} .

Definizione 7.6 – Sistema di punti materiale sottoposto a vincoli regolari

Consideriamo un sistema di punti materiali descritto dal vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ e dalla matrice delle masse M , soggetto al sistema di forze \underline{F} . Diremo che tale *sistema è sottoposto al sistema di vincoli regolari* (G_1, \dots, G_m) se ogni dato iniziale $\underline{x}_0 = \underline{x}(t_0) \in \Sigma$ e $\underline{v}_0 = \dot{\underline{x}}(t_0) \in T_{\underline{x}_0}\Sigma$, evolve lungo le soluzioni di

$$M \ddot{\underline{x}} = \underline{F}$$

in modo tale da rimanere su Σ per ogni tempo.

Osservazione. Avevamo già osservato che, in generale, un sistema meccanico sottoposto a vincoli regolari è associato ad un sistema di forze \underline{F} non conservativo, spesso neppure posizionale. Infatti tipicamente si ha

$$\underline{F} = \underline{F}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}).$$

Detto ciò, in molti casi si osserva che \underline{F} ha una struttura speciale, ovvero è decomponibile in una forza conservativa e in una non conservativa ortogonale al vincolo.

Definizione 7.7 – Forza non conservativa decomponibile

In un sistema sottoposto a vincoli regolari, consideriamo una forza $\underline{F} = \underline{F}(\underline{x}, \dot{\underline{x}})$ non conservativa. Diremo che \underline{F} è *decomponibile* se può essere espressa come somma di una *forza attiva conservativa* e di una *reazione vincolare*, ovvero se

$$\underline{F}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}) = -\frac{\partial}{\partial \underline{x}} U(\underline{x}) + \underline{R}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}).$$

Definizione 7.8 – Principio di D'Alembert

Consideriamo \underline{R} la reazione vincolare di una forza decomponibile. Diremo che \underline{R} soddisfa il *principio di D'Alembert* se \underline{R} è ortogonale al vincolo Σ . Ovvero se

$$\underline{R}(\underline{x}, \underline{v}) \cdot \underline{\eta} = 0 \quad \text{per ogni } \underline{v}, \underline{\eta} \in T_{\underline{x}}\Sigma.$$

Osservazione. Possiamo pensare alla $\underline{\eta}$ nella definizione come allo spostamento infinitesimo da \underline{x} a $\underline{x} + \underline{\eta} dt$ associato ad una velocità $\underline{\eta}$.

Definizione 7.9 – Sistema di vincoli ideali

Consideriamo un sistema meccanico $M \ddot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, \dot{\underline{x}})$ sottoposto al sistema di vincoli regolari (G_1, \dots, G_m) . Diremo che il sistema di vincoli è *ideale* rispetto alla decomposizione

$$\underline{F}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}) = -\frac{\partial}{\partial \underline{x}} U(\underline{x}) + \underline{R}(\underline{x}, \dot{\underline{x}})$$

se \underline{R} soddisfa il principio di D'Alembert.

7.3 SISTEMI DI PUNTI MATERIALI SOTTOPOSTI A SISTEMI DI VINCOLI IDEALI

Teorema 7.10 – Stazionarietà per sistemi di vincoli ideali

Consideriamo un sistema meccanico $M\ddot{\underline{x}} = \underline{F} = -\frac{\partial U}{\partial \underline{x}} + \underline{R}$ sottoposto al sistema di vincoli ideali (G_1, \dots, G_m) . I moti reali compatibili con il vincolo rendono stazionaria l'azione di Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}) = \frac{1}{2} \dot{\underline{x}} \cdot M \dot{\underline{x}} - U(\underline{x})$$

rispetto a variazioni in $\mathcal{V}_{\underline{x}}(\mathcal{M}_{t_1, t_2}^{G_1, \dots, G_m}(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2))$.

Dimostrazione. I moti reali compatibili con il vincolo sono le $\underline{x}(t)$ soluzioni del sistema tali che $\underline{x}(t) \in \Sigma \forall t$. Vogliamo quindi mostrare che tale $\underline{x}(t)$ rende stazionaria l'azione

$$A[\underline{x}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} \dot{\underline{x}}(t) \cdot M \dot{\underline{x}}(t) - U(\underline{x}(t)) \right] dt,$$

rispetto a variazioni $\underline{y}_\varepsilon \in \mathcal{V}_{\underline{x}}(\mathcal{M}_{t_1, t_2}^\Sigma(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2))$ con $\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2 \in \Sigma$. Ricordiamo inoltre che $\underline{y}_\varepsilon(t)$ è tale che

$$\underline{y}_0(t) = \underline{x}(t), \quad \underline{y}_\varepsilon(t_1) = \underline{\xi}_1, \quad \underline{y}_\varepsilon(t_2) = \underline{\xi}_2, \quad \underline{y}_\varepsilon(t) \in \Sigma \forall t.$$

Affinché l'azione sia resa stazionaria si deve avere

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} A[\underline{y}_\varepsilon(t)] \right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Ora

$$\underline{y}_\varepsilon(t) = \underline{x}(t) + \varepsilon \underline{z}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \text{con} \quad \underline{z}(t) = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \underline{y}_\varepsilon(t) \right|_{\varepsilon=0}.$$

Per cui

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} A[\underline{y}_\varepsilon(t)] \right|_{\varepsilon=0} &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} (\dot{\underline{x}}(t) + \varepsilon \dot{\underline{z}}(t)) \cdot M (\dot{\underline{x}}(t) + \varepsilon \dot{\underline{z}}(t)) - U(\underline{x}(t) + \varepsilon \underline{z}(t)) \right] dt \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\dot{\underline{x}}(t) \cdot M \dot{\underline{z}}(t) - \frac{\partial U}{\partial \underline{x}}(\underline{x}(t)) \cdot \underline{z}(t) \right] dt. \end{aligned}$$

Ricordiamo che $\underline{z}(t_1) = \underline{z}(t_2) = \underline{0}$ e integriamo per parti il primo addendo dell'integranda:

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} A[\underline{y}_\varepsilon(t)] \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left[-M \ddot{\underline{x}}(t) - \frac{\partial U}{\partial \underline{x}}(\underline{x}(t)) \right] \cdot \underline{z}(t) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left[M \ddot{\underline{x}}(t) + \frac{\partial U}{\partial \underline{x}}(\underline{x}(t)) \right] \cdot \underline{z}(t) dt$$

Sfruttiamo l'equazione del moto

$$M \ddot{\underline{x}} = -\frac{\partial U}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) + \underline{R}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}) \implies M \ddot{\underline{x}} + \frac{\partial U}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) = \underline{R}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}),$$

da cui

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} A[\underline{y}_\varepsilon(t)] \right|_{\varepsilon=0} = - \int_{t_1}^{t_2} \underline{R}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) \cdot \underline{z}(t) dt = 0,$$

dove l'integranda è nulla per il principio di D'Alembert. Il principio è verificato a patto che $\dot{\underline{x}}, \underline{z} \in \mathbb{T}_{\underline{x}}\Sigma$. Questo è banalmente vero per $\dot{\underline{x}}$ poiché i dati iniziali sono compatibili con il vincolo, mostriamolo quindi per \underline{z} . Di fatto osserviamo che $\underline{z}(t) \in \mathbb{T}_{\underline{x}}\Sigma$ per costruzione; ricordiamo infatti che

$$\underline{y}(\varepsilon, t) = \underline{y}_\varepsilon(t) \in \Sigma, \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

Consideriamo quindi il *moto virtuale*

$$\tilde{\mathbf{x}}(s) = \underline{\mathbf{y}}(s - \mathbf{t}, \mathbf{t}),$$

con \mathbf{t} fissato e $s \in (\mathbf{t} - \delta \mathbf{t}, \mathbf{t} + \delta \mathbf{t})$ che appartiene al vincolo per ogni s ed ha velocità

$$\underline{\boldsymbol{\eta}} = \left. \frac{d}{ds} \tilde{\mathbf{x}}(s) \right|_{s=\mathbf{t}} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \underline{\mathbf{y}}_\varepsilon(\mathbf{t}) \right|_{\varepsilon=0} = \underline{\mathbf{z}}(\mathbf{t}). \quad \square$$

Notazione. Con $\mathcal{M}_{t_1, t_2}^{G_1, \dots, G_m}(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2)$ indichiamo

$$\mathcal{M}_{t_1, t_2}^\Sigma = \{ \underline{\mathbf{x}}(t) \in \mathcal{M}_{t_1, t_2}(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2) \mid \underline{\mathbf{x}}(t) \in \Sigma, \forall t \in [t_1, t_2] \}.$$

Osservazione. Grazie a questo teorema, le equazioni del moto sul vincolo in coordinate adattate $\underline{\mathbf{q}}$ sono semplicemente le equazioni di Eulero-Lagrange associate alla lagrangiana ridotta

$$\tilde{\mathcal{L}}(\underline{\mathbf{q}}, \underline{\dot{\mathbf{q}}}) = \mathcal{L}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\dot{\mathbf{x}}}) \Big|_{\substack{\underline{\mathbf{x}} = \underline{\boldsymbol{\varphi}}(\underline{\mathbf{q}}) \\ \underline{\dot{\mathbf{x}}} = \mathbf{J}(\underline{\mathbf{q}}) \underline{\dot{\mathbf{q}}}}} = \frac{1}{2} [\mathbf{J}(\underline{\mathbf{q}}) \underline{\dot{\mathbf{q}}}] \cdot \mathbf{M} [\mathbf{J}(\underline{\mathbf{q}}) \underline{\dot{\mathbf{q}}}] - \mathcal{U}(\underline{\boldsymbol{\varphi}}(\underline{\mathbf{q}})).$$

dove $\underline{\mathbf{q}} = (q_1, \dots, q_s)$ con $s = n - m$ e $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{X}}(q_1, \dots, q_s, 0, \dots, 0) = \underline{\boldsymbol{\varphi}}(q_1, \dots, q_s)$.
Ovvero per

$$\tilde{\mathcal{L}}(\underline{\mathbf{q}}, \underline{\dot{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \underline{\dot{\mathbf{q}}} \cdot \tilde{\mathbf{M}}(\underline{\mathbf{q}}) \underline{\dot{\mathbf{q}}} - \mathcal{V}(\underline{\mathbf{q}}),$$

dove

$$\tilde{\mathbf{M}}(\underline{\mathbf{q}}) = {}^t \mathbf{J}(\underline{\mathbf{q}}) \mathbf{M} \mathbf{J}(\underline{\mathbf{q}}) \quad \text{e} \quad \mathcal{V}(\underline{\mathbf{q}}) = \mathcal{U}(\underline{\boldsymbol{\varphi}}(\underline{\mathbf{q}})).$$

7.4 CONSIDERAZIONE PER CASI DIPENDENTI DAL TEMPO

In questo paragrafo rivedremo alcune definizioni e teoremi esposti in precedenza nel caso in cui la dipendenza dal tempo sia esplicita. La dimostrazione dei teoremi verrà tralasciata in quanto analoga al caso stazionario.

Per quanto riguarda la notazione, molte definizioni avranno lo stesso nome; è quindi lasciata sottintesa la dipendenza dal tempo nella nomenclatura.

Definizione 7.11 – Sistema di vincoli

Consideriamo una superficie di vincolo $\Sigma(\mathbf{t})$. Diremo che $\underline{\mathbf{x}} \in \Sigma(\mathbf{t})$ se e soltanto se

$$\underline{\mathbf{x}} \text{ soddisfa } \begin{cases} G_1(\underline{\mathbf{x}}, \mathbf{t}) = 0 \\ \vdots \\ G_m(\underline{\mathbf{x}}, \mathbf{t}) = 0 \end{cases}$$

Definizione 7.12 – Sistema di vincoli regolare

Un sistema di vincoli (G_1, \dots, G_m) si dice *regolare* se gli m vettori

$$\frac{\partial G_1}{\partial \underline{\mathbf{x}}}(\underline{\mathbf{x}}, \mathbf{t}), \dots, \frac{\partial G_m}{\partial \underline{\mathbf{x}}}(\underline{\mathbf{x}}, \mathbf{t}),$$

sono indipendenti per ogni $\underline{\mathbf{x}} \in \Sigma(\mathbf{t})$.

Osserviamo che se $\underline{x}(t) \in \Sigma(t)$, allora

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) \cdot \frac{\partial G_1}{\partial \underline{x}}(\underline{x}(t), t) + \frac{\partial G_1}{\partial t}(\underline{x}(t), t) = 0 \\ \vdots \\ \dot{\underline{x}}(t) \cdot \frac{\partial G_m}{\partial \underline{x}}(\underline{x}(t), t) + \frac{\partial G_m}{\partial t}(\underline{x}(t), t) = 0 \end{cases}$$

Da ciò segue una prima differenza con il caso indipendente dal tempo. Dato $\underline{x}_0 \in \Sigma(t)$ diremo infatti che \underline{v}_0 è una velocità compatibile con il sistema di vincoli associati al punto \underline{x}_0 se

$$\begin{cases} \underline{v}_0 \cdot \frac{\partial G_1}{\partial \underline{x}}(\underline{x}_0, t_0) + \frac{\partial G_1}{\partial t}(\underline{x}_0, t_0) = 0 \\ \vdots \\ \underline{v}_0 \cdot \frac{\partial G_m}{\partial \underline{x}}(\underline{x}_0, t_0) + \frac{\partial G_m}{\partial t}(\underline{x}_0, t_0) = 0 \end{cases}$$

ma ciò non equivale, come nel caso stazionario, all'appartenere allo spazio tangente del vincolo. Infatti

$$\underline{\eta} \in T_{\underline{x}_0} \Sigma(t_0) \iff \begin{cases} \underline{\eta} \cdot \frac{\partial G_1}{\partial \underline{x}}(\underline{x}_0, t_0) = 0 \\ \vdots \\ \underline{\eta} \cdot \frac{\partial G_m}{\partial \underline{x}}(\underline{x}_0, t_0) = 0 \end{cases}$$

Teorema 7.13 – Sistema locale di coordinate adattate al vincolo

Sia $\Sigma(t)$ una superficie di vincolo associata ad un sistema di vincoli regolari. Allora $\Sigma(t)$ ammette, almeno localmente attorno ad ogni $\underline{x}_0 \in \Sigma(t_0)$, un sistema di coordinate adattate al vincolo. Ovvero, se U_0 è un aperto di \mathbb{R}^n e U_1 un intorno di $\underline{x}_0 \in \Sigma(t_0)$, esiste $\underline{X}: U_0 \longleftrightarrow U_1$ tale che

$$\underline{x} = \underline{X}(q_1, \dots, q_s, q_{s+1}, \dots, q_n, t) \in \Sigma(t_0) \cap U_1 \iff q_{s+1} = \dots = q_n = 0.$$

Osservazione. La mappa

$$\varphi(q_1, \dots, q_s, t) \equiv \underline{X}(q_1, \dots, q_s, 0, \dots, 0, t),$$

fornisce una parametrizzazione locale di $\Sigma(t_0)$ in un intorno di \underline{x}_0 .

Definizione 7.14 – Sistema di vincoli ideali

Consideriamo un sistema meccanico $M \ddot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t)$ sottoposto al sistema di vincoli regolari (G_1, \dots, G_m) associati alla superficie di vincolo $\Sigma(t)$. Diremo che il sistema di vincoli è *ideale* rispetto alla decomposizione

$$\underline{F}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t) = -\frac{\partial}{\partial \underline{x}} U(\underline{x}) + \underline{R}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t)$$

se \underline{R} soddisfa il principio di D'Alembert. Ovvero

$$\underline{R}(\underline{x}, \underline{v}, t) \cdot \underline{\eta} = 0$$

per ogni \underline{v} compatibile con i vincoli e per ogni $\underline{\eta} \in T_{\underline{x}} \Sigma(t)$.

Teorema 7.15 – Stazionarietà per sistemi di vincoli ideali

Consideriamo un sistema meccanico $M\ddot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t)$ sottoposto al sistema di vincoli ideali (G_1, \dots, G_m) associato alla superficie di vincolo $\Sigma(t)$. I moti reali compatibili con il vincolo rendono stazionaria l'azione di Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}) = \frac{1}{2} \dot{\underline{x}} \cdot M \dot{\underline{x}} - U(\underline{x})$$

rispetto a variazioni in $\mathcal{V}_{\underline{x}}(\mathcal{M}_{t_1, t_2}^{\Sigma(t)}(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2))$.

Osservazione. Se $\underline{\varphi}(q_1, \dots, q_s, t)$ è una parametrizzazione di $\Sigma(t)$, le equazioni del moto sul vincolo nelle coordinate q_1, \dots, q_s , altro non sono che le equazioni di Eulero-Lagrange per la lagrangiana ridotta

$$\tilde{\mathcal{L}}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = \mathcal{L}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}) \Big|_{\substack{\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{q}, t) \\ \dot{\underline{x}} = \underline{\psi}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)}}$$

dove

$$\underline{\psi}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial \underline{q}}(\underline{q}, t) \cdot \dot{\underline{q}} + \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial t}(\underline{q}, t).$$

Esempio. Consideriamo un punto materiale vincolato ad una guida circolare, di raggio l , che ruota uniformemente con pulsazione ω . Il punto è soggetto alla forza di gravità e ad una reazione vincolare \underline{R} che supponiamo soddisfi il principio di D'Alembert. La forza conservativa attiva avrà potenziale $U(\underline{x}) = m g z$. Passando in coordinate adattate al vincolo avremo

$$\underline{x} = \underline{\varphi}(\vartheta, t) = l \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos(\omega t) \\ \sin \vartheta \sin(\omega t) \\ -\cos \vartheta \end{pmatrix}$$

che dipende esplicitamente dal tempo. Da cui

$$\dot{\underline{x}}(t) = l \dot{\vartheta} \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos(\omega t) \\ \cos \vartheta \sin(\omega t) \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} + \omega l \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \sin(\omega t) \\ \sin \vartheta \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\psi}(\vartheta, \dot{\vartheta}, t)$$

Possiamo quindi scrivere la lagrangiana ridotta

$$\tilde{\mathcal{L}}(\vartheta, \dot{\vartheta}, t) = \frac{m}{2} |\dot{\underline{x}}|^2 - m g z \Big|_{\substack{\underline{x} = \underline{\varphi}(\vartheta, t) \\ \dot{\underline{x}} = \underline{\psi}(\vartheta, \dot{\vartheta}, t)}}$$

Ora, ricordando che $|\underline{a} + \underline{b}|^2 = |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 + 2\underline{a} \cdot \underline{b}$, avremo

$$|\dot{\underline{x}}|^2 = l^2 \dot{\vartheta}^2 + \omega^2 l^2 \sin^2 \vartheta,$$

da cui

$$\tilde{\mathcal{L}}(\vartheta, \dot{\vartheta}, t) = \frac{m}{2} (l^2 \dot{\vartheta}^2 + \omega^2 l^2 \sin^2 \vartheta) + m g l \cos \vartheta,$$

che osserviamo essere, in questo caso specifico, indipendente dal tempo. Applichiamo le equazioni di Eulero-Lagrange per trovare l'equazione del moto sul vincolo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\vartheta}}(\vartheta(t), \dot{\vartheta}(t)) = \frac{d}{dt} (m l^2 \dot{\vartheta}) = m l^2 \ddot{\vartheta}(t),$$

e

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \vartheta}(\vartheta(t), \dot{\vartheta}(t)) = m l^2 \left(\omega^2 \sin \vartheta(t) \cos \vartheta(t) - \frac{g}{l} \sin \vartheta(t) \right).$$

Da cui

$$m l^2 \ddot{\vartheta} = m l^2 \sin \vartheta \left(\omega^2 \cos \vartheta - \frac{g}{l} \right) = -V'(\vartheta).$$

L'equazione del moto ammette una grandezza conservata

$$E = \frac{m l^2}{2} \dot{\vartheta}^2 + V(\vartheta)$$

la quale è conservata poiché, come al solito

$$\frac{d}{dt} E = m l^2 \dot{\vartheta} \ddot{\vartheta} + V'(\vartheta) \dot{\vartheta} = 0 \iff \dot{\vartheta} (m l^2 \ddot{\vartheta} + V'(\vartheta)) = 0,$$

che è vero per l'equazione del moto. Il moto si ottiene quindi per quadratura dalle solite relazioni

$$\dot{\vartheta} = \pm \sqrt{\frac{2}{m l^2} (E - V(\vartheta))} \quad e \quad t - t_0 = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta(t)} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\frac{2}{m l^2} (E - V(\vartheta))}}$$

Da questo punto in poi si può procedere con uno studio qualitativo del moto come visto nel capitolo precedente.

Osservazione. A differenza dell'esempio precedente, non sempre si arriva a dei risultati integrabili per quadrature. L'energia E conservata in questo esercizio è un caso particolare della cosiddetta *energia generalizzata* che è una grandezza conservata per le equazioni di Eulero-Lagrange associate a qualsiasi lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ indipendente dal tempo. In questo caso, la conservazione dell'energia è conseguenza dell'indipendenza dal tempo della lagrangiana associata al sistema, oppure, come talvolta si dice, dell'invarianza di \mathcal{L} rispetto a traslazioni temporali.

Definizione 7.16 – Energia generalizzata

Consideriamo un sistema di coordinate \mathbf{q} adattate al vincolo. L'espressione dell'*energia generalizzata* è data da

$$E = \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

Osservazione. Se $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - V(\mathbf{q})$, l'espressione dell'energia generalizzata sarà

$$E = \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - V(\mathbf{q}) = V(\mathbf{q}) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = U + K,$$

ovvero l'energia generalizzata è un'energia meccanica "standard"

Proposizione 7.17 – Energia generalizzata conservata dalle equazioni di E-L

L'energia generalizzata è una grandezza conservata se $\mathbf{q}(t)$ soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange.

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che l'espressione dell'energia generalizzata è un integrale primo se $\underline{q}(t)$ risolve le equazioni di Eulero-Lagrange, ovvero se

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underline{q}}}(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t)) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{q}}(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t)).$$

Calcoliamo quindi la derivata di E rispetto al tempo e mostriamo che è nulla:

$$\frac{d}{dt} E = \ddot{\underline{q}} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underline{q}}} + \dot{\underline{q}} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underline{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{q}} \cdot \dot{\underline{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underline{q}}} \cdot \ddot{\underline{q}} = \dot{\underline{q}} \cdot \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underline{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{q}} \right] = 0,$$

dove l'espressione in parentesi quadra è nulla poiché $\underline{q}(t)$ risolve le equazioni di Eulero-Lagrange. □

8 | ALTRE GRANDEZZE CONSERVATE

In questo capitolo descriveremo altre grandezze conservate oltre l'energia per lagrangiane indipendenti dal tempo.

Prima ricordiamo che se $\mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = \mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$ allora

$$E = E(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \underline{\dot{q}} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\dot{q}}}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) - \mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$$

è una grandezza conservata. Infatti, se $\underline{q}(t)$ risolve le equazioni di Eulero-Lagrange, si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t)) &= \underline{\ddot{q}}(t) \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\dot{q}}}(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t)) + \underline{\dot{q}}(t) \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\dot{q}}}(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t)) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{q}}(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t)) \cdot \underline{\dot{q}}(t) \\ &\quad - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\dot{q}}}(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t)) \cdot \underline{\ddot{q}}(t) = \underline{\dot{q}}(t) \cdot \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\dot{q}}}(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t)) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{q}}(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t)) \right), \end{aligned}$$

dove l'espressione tra parentesi è proprio l'equazione di Eulero-Lagrange. In particolare, se \mathcal{L} è una lagrangiana meccanica

$$\mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}} \cdot M(\underline{q}) \underline{\dot{q}} - V(\underline{q}) \implies E = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}} \cdot M(\underline{q}) \underline{\dot{q}} + V(\underline{q}).$$

Quindi l'invarianza rispetto a traslazioni temporali comporta la conservazione dell'energia. Andiamo a studiare di seguito altre simmetrie e grandezze conservate

8.1 VARIABILI CICLICHE

Definizione 8.1 – Variabile ciclica

Consideriamo una lagrangiana $\mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$ con $\underline{q} = (q_1, \dots, q_s)$. Diremo che una componente q_i di \underline{q} è una *variabile ciclica* se \mathcal{L} è indipendente da q_i . Ovvero

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_i, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s) = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s).$$

Definizione 8.2 – Momento coniugato

Sia q_i una variabile ciclica per la lagrangiana \mathcal{L} . Definiamo *momento coniugato* per \mathcal{L} la seguente quantità

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}).$$

Proposizione 8.3 – Conservazione del momento coniugato

Sia q_i una variabile ciclica per la lagrangiana \mathcal{L} . Allora il momento coniugato di \mathcal{L} si conserva.

| *Dimostrazione.* Supponiamo, per comodità di notazione, che q_s sia una variabile ciclica,

in particolare avremo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_s}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0.$$

Scrivendo le equazioni di Eulero-Lagrange per la coordinata s , troviamo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_s} = 0,$$

ovvero $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_s}$ è una grandezza conservata. □

Osservazione. In quanto grandezza conservata, avremo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_s}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \equiv \mathbf{p}_s$$

se $\mathbf{q}(t)$ è soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange. Inoltre, nel caso in questa relazione sia invertibile per $\dot{\mathbf{q}}_s(t)$, cosa che tipicamente accade almeno localmente, avremo

$$\dot{\mathbf{q}}_s(t) = f(\mathbf{q}_1(t), \dots, \mathbf{q}_{s-1}(t), \dot{\mathbf{q}}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{q}}_{s-1}(t), \mathbf{p}_s),$$

dove, in questa scrittura, f è la funzione ottenuta invertendo l'equazione precedente rispetto a $\dot{\mathbf{q}}_s$. In tal caso è possibile ridurre di uno i gradi di libertà del sistema sostituendo $\dot{\mathbf{q}}_s$ nell'equazione del moto.

Esempio. Consideriamo un pendolo sferico, dove abbiamo

$$\underline{\mathbf{x}} = l \begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \varphi \\ \sin \alpha \sin \varphi \\ 1 - \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{\dot{\mathbf{x}}} = l \dot{\alpha} \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \varphi \\ \cos \alpha \sin \varphi \\ \sin \alpha \end{pmatrix} + l \dot{\varphi} \sin \alpha \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\mathcal{L}(\alpha, \varphi, \dot{\alpha}, \dot{\varphi}) = \frac{m l^2}{2} (\dot{\alpha}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha) - m g l (1 - \cos \alpha).$$

Osserviamo che $\mathcal{L}(\alpha, \varphi, \dot{\alpha}, \dot{\varphi}) = \mathcal{L}(\alpha, \dot{\alpha}, \dot{\varphi})$, ovvero φ è una variabile ciclica. Quindi

$$A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \equiv m l^2 \dot{\varphi} \sin^2 \alpha,$$

è una grandezza conservata. Discutiamo l'invertibilità di tale equazione rispetto a $\dot{\varphi}$.

- Caso $A = 0$: si ha se e solo se $\dot{\varphi} \sin \alpha = 0$.
- Caso $A \neq 0$: si ha se e solo se $\sin \alpha \neq 0$ e $\dot{\varphi} \neq 0$. In tal caso la legge di conservazione del momento è invertibile e si ha

$$\dot{\varphi} = \frac{A}{m l^2 \sin^2 \alpha} = f(\alpha, \dot{\alpha}, A).$$

Consideriamo ora la legge del moto ottenuta dalle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$m l^2 \ddot{\alpha} = m l^2 \dot{\varphi}^2 \sin \alpha \cos \alpha - m g l \sin \alpha.$$

Nel primo caso si ha, come detto, $\dot{\varphi} \sin \alpha = 0$, per cui l'equazione del moto si riduce a

$$m l^2 \ddot{\alpha} = -m g l \sin \alpha,$$

ovvero all'equazione del pendolo semplice. Nel secondo caso sostituiamo $\dot{\varphi}$ nell'equazione del moto per ridurre di uno i gradi di libertà del sistema:

$$m l^2 \ddot{\alpha} = m l^2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{A^2}{(m l^2)^2 \sin^4 \alpha} - m g l \sin \alpha = \frac{A^2}{m l^2 \sin^3 \alpha} \cos \alpha - m g l \sin \alpha.$$

Una volta ridotte le equazioni del moto è lecito chiedersi se tali equazioni "ridotte" siano il risultato delle equazioni di Eulero-Lagrange per qualche opportuna Lagrangiana. Una possibilità che sembra naturale, ma che verificheremo essere errata, è che la lagrangiana opportuna sia data dalla lagrangiana di partenza in cui è stato sostituito \dot{q}_s con la sua espressione data da f , ovvero

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_{s-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{s-1}, f(q_1, \dots, q_{s-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{s-1}, p_s))$$

Sfruttiamo l'esempio precedente per fornire un controesempio: nel contesto del pendolo sferico avremmo avuto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\alpha, \dot{\alpha}, \frac{A}{m l^2 \sin^2 \alpha}\right) &= \frac{m l^2}{2} \left(\dot{\alpha}^2 + \frac{\sin^2 \alpha A^2}{(m l^2)^2 \sin^4 \alpha} \right) + m g l \cos \alpha \\ &= \frac{m l^2}{2} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \frac{A^2}{m l^2 \sin^2 \alpha} + m g l \cos \alpha. \end{aligned}$$

Se calcoliamo le equazioni del Eulero-Lagrange per tale lagrangiana, otteniamo

$$m l^2 \ddot{\alpha} = -\frac{A^2}{m l^2 \sin^3 \alpha} \cos \alpha - m g l \sin \alpha,$$

che differisce dalle equazioni corrette per il segno del primo addendo.

La scelta corretta della lagrangiana ridotta è data dalla cosiddetta *lagrangiana di Routh*.

Definizione 8.4 – Lagrangiana di Routh

Sia q_s una variabile ciclica per la lagrangiana \mathcal{L} e supponiamo che la legge di conservazione del momento coniugato p_s sia invertibile tramite la funzione f , ovvero

$$\dot{q}_s = f(q_1, \dots, q_{s-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{s-1}, p_s) \equiv f.$$

Definiamo la *lagrangiana di Routh* $\mathcal{L}_R(q_1, \dots, q_{s-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{s-1})$ associata alle equazioni del moto ridotte come

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_{s-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{s-1}, f) - p_s f.$$

Osservazione. La scelta di tale lagrangiana è opportuna in quanto, sulle soluzioni delle equazioni del moto, questa soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange se e solo se le soddisfa la lagrangiana originale. Infatti

$$p_s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_s} \implies \frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_s} \frac{\partial f}{\partial q_i} - p_s \frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

per ogni $i = 1, \dots, s-1$. Analogamente

$$\frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_s} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} - p_s \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

per ogni $i = 1, \dots, s-1$. Ciò mostra che

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial q_i} \iff \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

per ogni $i = 1, \dots, s-1$.

Notazione. Chiaramente quanto detto si applica ad una qualsiasi variabile ciclica q_i . La scelta di q_s è dovuta solo alla semplificazione nella notazione.

Esempio. Verifichiamo quanto detto nell'esempio del pendolo sferico. La lagrangiana di Routh sarà

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_R\left(\alpha, \dot{\alpha}, \frac{A}{m l^2 \sin^2 \alpha}\right) &= \frac{m l^2}{2} \dot{\alpha}^2 + \frac{A^2}{2m l^2 \sin^2 \alpha} + m g l \cos \alpha - \frac{A^2}{m l^2 \sin^2 \alpha}, \\ &= \frac{m l^2}{2} \dot{\alpha}^2 - \frac{A^2}{2m l^2 \sin^2 \alpha} + m g l \cos \alpha\end{aligned}$$

la cui equazione di Eulero-Lagrange è proprio

$$m l^2 \ddot{\alpha} = \frac{A^2}{m l^2 \sin^3 \alpha} \cos \alpha - m g l \sin \alpha,$$

che è corretta.

8.2 TEOREMA DI NÖTHER

In questo paragrafo studieremo il caso di lagrangiane invarianti rispetto a un gruppo di trasformazioni con un parametro continuo.

Definizione 8.5 – Gruppo di trasformazioni

Un *gruppo di trasformazioni* G da Ω in sé stesso è un insieme di trasformazioni invertibili $g: \Omega \rightarrow \Omega$ tale che, detta \cdot una qualche legge di composizione,

1. $g_1, g_2 \in G \implies g_1 \cdot g_2 \in G$.
2. $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$.
3. Esiste $I \in G$ tale che $g \cdot I = I \cdot g = g$ per ogni $g \in G$.
4. Per ogni $g \in G$ esiste $g^{-1} \in G$ tale che $g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = I$.

Noi siamo interessati al caso di un gruppo parametrizzato da $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$g_\alpha: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Supporremo inoltre che

- $g_\alpha \cdot g_\beta = g_{\alpha+\beta}$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $I = g_0$.
- g_α è derivabile in α per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esempio (Gruppo delle traslazioni). Prendiamo $\underline{q} \in \mathbb{R}^3$ e consideriamo il seguente gruppo di trasformazioni

$$g_\alpha(\underline{q}) = \underline{q} + \alpha \hat{n}_0,$$

dove \hat{n}_0 è un vettore unitario. Si vede facilmente che le proprietà da noi cercate sono soddisfatte in quanto

- $g_\alpha \circ g_\beta(\underline{q}) = \underline{q} + (\alpha + \beta) \hat{n}_0 = g_{\alpha+\beta}(\underline{q})$.
- $g_0(\underline{q}) = \underline{q}$.
- g_α è chiaramente differenziabile in α .

Esempio (Gruppo delle rotazioni attorno all'asse \hat{z}). Prendiamo $\underline{q} \in \mathbb{R}^3$ e consideriamo il seguente gruppo di trasformazioni

$$g_\alpha(\underline{q}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

Anche in questo caso si mostra facilmente che le proprietà sono soddisfatte.

Definizione 8.6 – Lagrangiana invariante per gruppi di trasformazioni

Diremo che la lagrangiana $\mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$ è *invariante rispetto al gruppo di trasformazioni* di elementi g_α se

$$\mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \mathcal{L}\left(g_\alpha(\underline{q}), \frac{\partial g_\alpha}{\partial \underline{q}}(\underline{q}) \cdot \underline{\dot{q}}\right) \quad \text{dove} \quad \frac{\partial g_\alpha}{\partial \underline{q}}(\underline{q}) \cdot \underline{\dot{q}} = \frac{d}{dt} g_\alpha(\underline{q}).$$

Teorema 8.7 – di Nöther

Sia \mathcal{L} una lagrangiana invariante rispetto a un gruppo di trasformazioni di parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora il sistema ammette la seguente grandezza conservata

$$I(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\dot{q}}}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) \cdot \underline{f}(\underline{q}) \quad \text{dove} \quad \underline{f}(\underline{q}) = \left. \frac{d}{d\alpha} g_\alpha(\underline{q}) \right|_{\alpha=0}.$$

Dimostrazione. Supponiamo che \mathcal{L} sia invariante rispetto al gruppo di trasformazioni g_α , quindi per definizione

$$\mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \mathcal{L}\left(g_\alpha(\underline{q}), \frac{\partial g_\alpha}{\partial \underline{q}}(\underline{q}) \cdot \underline{\dot{q}}\right).$$

Ciò significa che \mathcal{L} non dipende da α , per cui

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \mathcal{L}\left(g_\alpha(\underline{q}), \frac{\partial g_\alpha}{\partial \underline{q}}(\underline{q}) \cdot \underline{\dot{q}}\right) \right|_{\alpha=0} = 0.$$

Quindi, sviluppando la derivata, si ottiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{q}} \cdot \underbrace{\left. \frac{d}{d\alpha} g_\alpha(\underline{q}) \right|_{\alpha=0}}_{=\underline{f}(\underline{q})} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\dot{q}}} \cdot \frac{\partial \underline{f}(\underline{q})}{\partial \underline{q}} \underline{\dot{q}} = 0.$$

Se $\underline{q} = \underline{q}(t)$ è soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange e $\underline{\dot{q}} = \underline{\dot{q}}(t)$, allora la precedente espressione diventa

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\dot{q}}}(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t)) \cdot \underline{f}(\underline{q}(t)) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\dot{q}}}(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t)) \cdot \frac{\partial \underline{f}(\underline{q}(t))}{\partial \underline{q}} \underline{\dot{q}}(t) = 0,$$

ovvero

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\dot{q}}}(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t)) \cdot \underline{f}(\underline{q}(t)) \right] = 0,$$

quindi $I(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$ è conservata. □

Esempio (Sistemi di particelle invarianti per traslazioni). Supponiamo di avere un sistema di particelle $\underline{x}^{(1)}, \dots, \underline{x}^{(N)} \in \mathbb{R}^3$ di masse m_1, \dots, m_N e definiamo

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{x}^{(N)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3N}$$

e M la matrice delle masse. La lagrangiana meccanica associata al sistema è pertanto

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} |\dot{\underline{x}}^{(j)}|^2 - U(\underline{x}^{(1)}, \dots, \underline{x}^{(N)}) = \frac{1}{2} \dot{\underline{x}} \cdot M \dot{\underline{x}} - U(\underline{x}).$$

Supponiamo che il sistema sia invariante per traslazioni nella direzione \hat{e}_1 , ovvero

$$U(\underline{x}^{(1)}, \dots, \underline{x}^{(N)}) = U(\underline{x}^{(1)} + \alpha \hat{e}_1, \dots, \underline{x}^{(N)} + \alpha \hat{e}_1).$$

Quindi \mathcal{L} è invariante rispetto al gruppo di trasformazioni di elementi

$$g_\alpha(\underline{x}) = \underline{x} + \alpha \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \vdots \\ \hat{e}_1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo quindi applicare il teorema di Nöther calcolando prima f :

$$\underline{f}(\underline{x}) = \left. \frac{d}{d\alpha} g_\alpha(\underline{x}) \right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \vdots \\ \hat{e}_1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto la grandezza conservata è

$$I(\underline{x}, \dot{\underline{x}}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underline{x}}} \cdot \underline{f}(\underline{x}) = M \dot{\underline{x}} \cdot \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \vdots \\ \hat{e}_1 \end{pmatrix} = \left[\sum_{j=1}^N m_j \dot{\underline{x}}^{(j)} \right] \cdot \hat{e}_1 \equiv \underline{P} \cdot \hat{e}_1,$$

dove \underline{P} è la quantità di moto totale.

Osserviamo che se il sistema fosse invariante per traslazioni anche rispetto a \hat{e}_2 e \hat{e}_3 , allora $\underline{P} \cdot \hat{e}_k$ sarebbe conservata per $k = 1, 2, 3$, ovvero

$$\underline{P} = \sum_{j=1}^N m_j \dot{\underline{x}}^{(j)}$$

è conservata.

Esempio (Sistemi di particelle invarianti per rotazioni). Se in un sistema analogo al precedente U è invariante sotto rotazioni rispetto all'asse \hat{e}_k , tramite il teorema di Nöther si dimostra che $\underline{L} \cdot \hat{e}_k$ è conservata, dove

$$\underline{L} = \sum_{j=1}^N m_j \underline{x}^{(j)} \wedge \dot{\underline{x}}^{(j)}$$

è il momento angolare totale.

Parte IV

Cambiamenti di sistemi di riferimento e corpo rigido

9 | CAMBIAMENTI DI SISTEMI DI RIFERIMENTO

Stabiliamo una notazione che utilizzeremo nel corso del capitolo. Definiamo un sistema "fisso" k ed un sistema "mobile" K in \mathbb{R}^3 definiti dai seguenti versori e dalle origini O, O' :

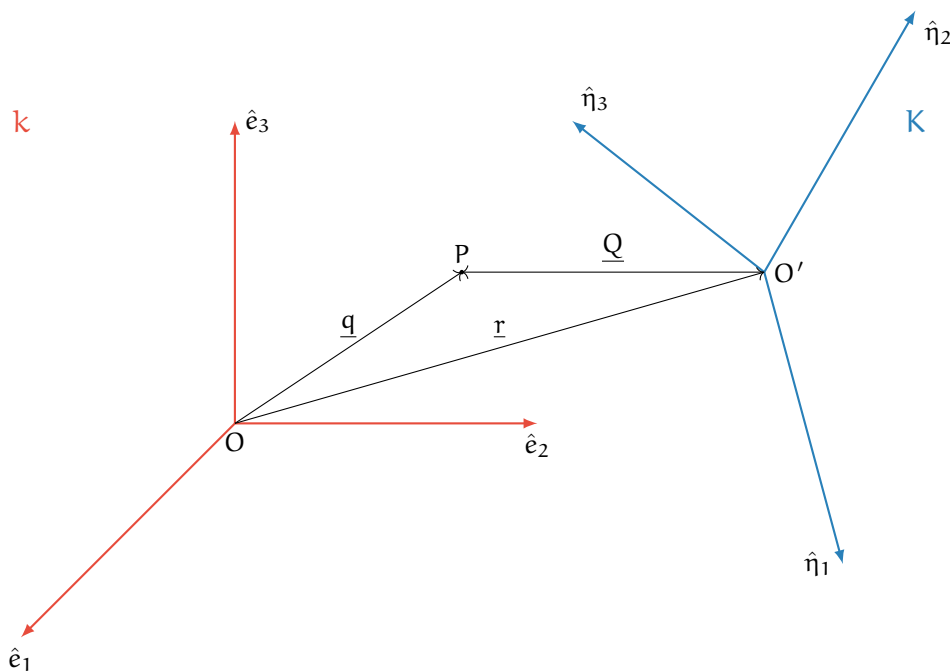
$$k = (O, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3) \quad \text{e} \quad K = (O', \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3).$$

I vettori in minuscolo faranno riferimento al sistema di riferimento fisso, mentre quelli in maiuscolo al sistema mobile. Quindi in generale avremo

$$\underline{v} = v_1 \hat{e}_1 + v_2 \hat{e}_2 + v_3 \hat{e}_3 \quad \text{e} \quad \underline{V} = V_1 \hat{\eta}_1 + V_2 \hat{\eta}_2 + V_3 \hat{\eta}_3.$$

9.1 LEGGI DI TRASFORMAZIONE DELLA POSIZIONE

Preso un punto materiale P che si muove nello spazio, vogliamo descriverne il moto sia nelle coordinate di k che in quelle di K . I sistemi sono visibili graficamente nella figura seguente



Le coordinate di P possono essere espresse nei due sistemi di riferimento:

$$\overrightarrow{OP} = q_1 \hat{e}_1 + q_2 \hat{e}_2 + q_3 \hat{e}_3 \quad \text{e} \quad \overrightarrow{O'P} = Q_1 \hat{\eta}_1 + Q_2 \hat{\eta}_2 + Q_3 \hat{\eta}_3,$$

inoltre

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} \iff q_1 \hat{e}_1 + q_2 \hat{e}_2 + q_3 \hat{e}_3 = r_1 \hat{e}_1 + r_2 \hat{e}_2 + r_3 \hat{e}_3 + Q_1 \hat{\eta}_1 + Q_2 \hat{\eta}_2 + Q_3 \hat{\eta}_3,$$

da cui si ottiene la relazione

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_1(\hat{\eta}_1)_1 + Q_2(\hat{\eta}_2)_1 + Q_3(\hat{\eta}_3)_1 \\ Q_1(\hat{\eta}_1)_2 + Q_2(\hat{\eta}_2)_2 + Q_3(\hat{\eta}_3)_2 \\ Q_1(\hat{\eta}_1)_3 + Q_2(\hat{\eta}_2)_3 + Q_3(\hat{\eta}_3)_3 \end{pmatrix} \quad \text{dove } (\hat{\eta}_i)_j = \hat{\eta}_i \cdot \hat{e}_j.$$

Possiamo quindi introdurre la matrice di rotazione B definita dalle proiezioni delle $\hat{\eta}_i$ sulle \hat{e}_j :

$$B = \begin{pmatrix} (\hat{\eta}_1)_1 & (\hat{\eta}_2)_1 & (\hat{\eta}_3)_1 \\ (\hat{\eta}_1)_2 & (\hat{\eta}_2)_2 & (\hat{\eta}_3)_2 \\ (\hat{\eta}_1)_3 & (\hat{\eta}_2)_3 & (\hat{\eta}_3)_3 \end{pmatrix} = (\hat{\eta}_1 \quad \hat{\eta}_2 \quad \hat{\eta}_3)$$

una matrice
ortogonale è tale
che $B^{-1} = {}^t B$

Osservazione. B è la matrice di rotazione che descrive la posizione di $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)$ rispetto al sistema fisso. Inoltre B è una matrice ortogonale, in quanto $\hat{\eta}_i \cdot \hat{\eta}_j = \delta_{i,j}$. Ricordiamo che una matrice ortogonale ha determinante ± 1 , infatti

$$\text{Id} = B^{-1}B = {}^t B B \implies 1 = \det {}^t B \det B = (\det B)^2.$$

In particolare $\det B = 1$ se la terna $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)$ è destrorsa.

Dalla matrice di rotazione deduciamo la legge di trasformazione della posizione:

$$\underline{q} = \underline{r} + B \underline{Q}.$$

Legge di trasformazione della posizione

Osservazione. Il sistema mobile K può essere dipendente dal tempo, cioè vi è la possibilità che

$$\underline{r} = \underline{r}(t) \quad \text{e} \quad B = B(t).$$

In generale faremo sempre questa assunzione, ed esplicitamente la legge di trasformazione sarà

$$\underline{q}(t) = \underline{r}(t) + B(t) \underline{Q}(t).$$

9.2 LEGGE DI TRASFORMAZIONE DELLA VELOCITÀ

Ci occupiamo ora di ottenere una legge analoga per le velocità. Derivando la legge della posizione avremo

$$\dot{\underline{q}} = \dot{\underline{r}} + \dot{B} \underline{Q} + B \dot{\underline{Q}}.$$

Cerchiamo di semplificare il termine $\dot{B} \underline{Q}$:

$$\dot{B} \underline{Q} = \dot{B} B^{-1} B \underline{Q} = \dot{B} {}^t B B \underline{Q} = M B \underline{Q} = M (\underline{q} - \underline{r}),$$

dove $M = \dot{B} B^{-1} = \dot{B} {}^t B$. Osserviamo che M è antisimmetrica, ovvero ${}^t M = -M$, infatti

$$B {}^t B = \text{Id} \implies \frac{d}{dt}(B {}^t B) = 0 \iff \dot{B} {}^t B + B {}^t \dot{B} = 0,$$

da cui

$${}^t M = {}^t (\dot{B} {}^t B) = B {}^t \dot{B} = -\dot{B} {}^t B = -M.$$

In particolare, un quanto matrice antisimmetrica, M sarà della forma

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

dove $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sono le componenti di un opportuno vettore $\underline{\omega}$. Questa notazione serve ad evidenziare che applicare M ad un vettore \underline{v} è come calcolare il prodotto vettoriale $\underline{\omega} \wedge \underline{v}$, infatti

$$M \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_3 v_2 + \omega_2 v_3 \\ \omega_3 v_1 - \omega_1 v_3 \\ -\omega_2 v_1 + \omega_1 v_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \underline{\omega} \wedge \underline{v}.$$

Riepilogando la nostra attuale legge di trasformazione delle velocità è

$$\underline{\dot{q}} = \underline{\dot{r}} + M B \underline{Q} + B \underline{\dot{Q}} = \underline{\dot{r}} + \underline{\omega} \wedge (\underline{q} - \underline{r}) + B \underline{\dot{Q}},$$

dove il primo addendo è detto *velocità di traslazione* e il secondo *velocità rotazionale di trascinamento*.

Osservazione. In questa scrittura, $\underline{\omega}$ ha l'interpretazione fisica della velocità angolare istantanea della terna $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)$ rispetto al sistema fisso. Questa interpretazione può essere verificata analiticamente, infatti

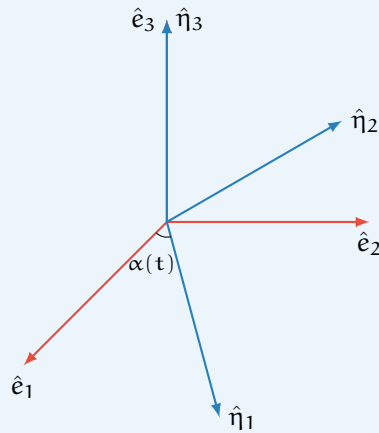
$$\begin{aligned} \dot{B} &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{\eta}_1 & \hat{\eta}_2 & \hat{\eta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\hat{\eta}_1}{dt} & \frac{d\hat{\eta}_2}{dt} & \frac{d\hat{\eta}_3}{dt} \end{pmatrix} = \dot{B} {}^t B B = M B = M \begin{pmatrix} \hat{\eta}_1 & \hat{\eta}_2 & \hat{\eta}_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M \hat{\eta}_1 & M \hat{\eta}_2 & M \hat{\eta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\omega} \wedge \hat{\eta}_1 & \underline{\omega} \wedge \hat{\eta}_2 & \underline{\omega} \wedge \hat{\eta}_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

per cui

$$\frac{d\hat{\eta}_i}{dt} = \underline{\omega} \wedge \hat{\eta}_i \quad \text{per } i = 1, 2, 3,$$

in particolare $d\hat{\eta}_i = \underline{\omega} dt \wedge \hat{\eta}_i$. Ciò mostra esplicitamente la validità dell'interpretazione precedente.

Esempio. Consideriamo il caso in cui $\hat{\eta}_3$ coincida con \hat{e}_3 e $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2$ ruotino attorno ad esso. Troviamo esplicitamente $\underline{\omega}$ per convincerci del significato fisico. Il sistema è quello rappresentato in figura:



La matrice di rotazione è data da

$$B = \begin{pmatrix} \hat{\eta}_1 & \hat{\eta}_2 & \hat{\eta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da cui possiamo calcolare $M = \dot{B} {}^t B$:

$$M = \dot{\alpha} \begin{pmatrix} -\sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \dot{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Infine possiamo associare ad M il vettore $\underline{\omega} = (0, 0, \dot{\alpha})$, il quale, come ci aspettavamo, ha le caratteristiche di una velocità angolare.

Per completare la legge di trasformazione delle velocità, portiamo $\underline{\omega}$ nelle coordinate del sistema mobile:

$$\underline{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3 = \Omega_1 \hat{\eta}_1 + \Omega_2 \hat{\eta}_2 + \Omega_3 \hat{\eta}_3 = B \underline{\Omega}.$$

Quindi

$$\underline{\omega} \wedge (\underline{q} - \underline{r}) = \underline{\omega} \wedge \underline{B} \underline{Q} = \underline{B} \underline{\Omega} \wedge \underline{B} \underline{Q} = \underline{B} (\underline{\Omega} \wedge \underline{Q}),$$

dove l'ultima uguaglianza è vera poiché il prodotto vettoriale è covariante rispetto alle rotazioni. Infine, scrivendo

$$\underline{\dot{r}} = \underline{B} \underline{V} \quad \text{con } \underline{V} = \underline{B}^{-1} \underline{\dot{r}},$$

possiamo scrivere la legge di trasformazione delle velocità:

$$\underline{\dot{q}} = \underline{B} (\underline{V} + \underline{\Omega} \wedge \underline{Q} + \underline{\dot{Q}}).$$

Legge di trasformazione delle velocità

9.3 LEGGE DI TRASFORMAZIONE DELLE FORZE

Tramite queste leggi di trasformazione possiamo calcolare le equazioni del moto in K corrispondenti, nel sistema fisso, a

$$m \underline{\ddot{q}} = \underline{f}(\underline{q}) = - \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{q}}(\underline{q}).$$

Queste ultime corrispondono alle equazioni di Eulero-Lagrange per la lagrangiana meccanica

$$\mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \frac{m}{2} |\underline{\dot{q}}|^2 - \underline{U}(\underline{q}).$$

Ci basta quindi applicare le leggi di trasformazioni a \mathcal{L} per trovare la corrispondente lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}})$ nel sistema mobile.

$$\tilde{\mathcal{L}}(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}) = \frac{m}{2} |\underline{B} (\underline{V} + \underline{\Omega} \wedge \underline{Q} + \underline{\dot{Q}})|^2 - \underline{U}(\underline{r} + \underline{B} \underline{Q}).$$

Osserviamo che \underline{B} è una matrice ortogonale, per cui $|\underline{B} \underline{v}|^2 = |\underline{v}|^2$, infatti

$$|\underline{B} \underline{v}|^2 = \underline{B} \underline{v} \cdot \underline{B} \underline{v} = \underline{v} \cdot ({}^t \underline{B} \underline{B} \underline{v}) = \underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2.$$

Per cui otteniamo

$$\tilde{\mathcal{L}}(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}) = \frac{m}{2} |\underline{V} + \underline{\Omega} \wedge \underline{Q} + \underline{\dot{Q}}|^2 - \underline{U}(\underline{r} + \underline{B} \underline{Q}).$$

Lagrangiana meccanica nel sistema mobile

Per il calcolo delle equazioni di Eulero-Lagrange è utile sviluppare il modulo della lagrangiana, ottenendo

$$\tilde{\mathcal{L}}(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}) = \frac{m}{2} \left[|\underline{V}|^2 + |\underline{\Omega} \wedge \underline{Q}|^2 + |\underline{\dot{Q}}|^2 + 2\underline{V} \cdot (\underline{\Omega} \wedge \underline{Q}) + 2\underline{V} \cdot \underline{\dot{Q}} + 2\underline{\dot{Q}} \cdot (\underline{\Omega} \wedge \underline{Q}) \right] - \underline{U}(\underline{r} + \underline{B} \underline{Q}).$$

Inoltre sfruttiamo la seguente proprietà del prodotto vettoriale

$$\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) = \underline{w} \cdot (\underline{u} \wedge \underline{v}) = \underline{v} \cdot (\underline{w} \wedge \underline{u}),$$

per ottenere le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} |\underline{\Omega} \wedge \underline{Q}|^2 &= (\underline{\Omega} \wedge \underline{Q}) \cdot (\underline{\Omega} \wedge \underline{Q}) = \underline{Q} \cdot ((\underline{\Omega} \wedge \underline{Q}) \wedge \underline{\Omega}); \\ \underline{V} \cdot (\underline{\Omega} \wedge \underline{Q}) &= \underline{Q} \cdot (\underline{V} \wedge \underline{\Omega}); \\ \underline{\dot{Q}} \cdot (\underline{\Omega} \wedge \underline{Q}) &= \underline{Q} \cdot (\underline{\dot{Q}} \wedge \underline{\Omega}). \end{aligned}$$

Procediamo quindi con il calcolo delle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \underline{\dot{Q}}} = m (\underline{\dot{Q}} + \underline{V} + \underline{\Omega} \wedge \underline{Q}),$$

analogamente

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \underline{Q}} = m (\underline{\Omega} \wedge \underline{Q}) \wedge \underline{\Omega} + m \underline{V} \wedge \underline{\Omega} + m \underline{\dot{Q}} \wedge \underline{\Omega} - \frac{\partial U}{\partial \underline{Q}} (\underline{r} + \mathbf{B} \underline{Q}),$$

dove

$$\frac{\partial U}{\partial Q_i} (\underline{r} + \mathbf{B} \underline{Q}) = \sum_j \frac{\partial U}{\partial q_j} (\underline{r} + \mathbf{B} \underline{Q}) \underbrace{\frac{\partial (B Q)_j}{\partial Q_i}}_{=B_{ji}} = \sum_j B_{ji} \frac{\partial U}{\partial q_j} (\underline{r} + \mathbf{B} \underline{Q}),$$

da cui definiamo

$$\underline{F} = - \frac{\partial U}{\partial \underline{Q}} (\underline{r} + \mathbf{B} \underline{Q}) = - {}^t \mathbf{B} \frac{\partial U}{\partial \underline{q}} (\underline{r} + \mathbf{B} \underline{Q}) = \mathbf{B}^{-1} \underline{f}.$$

Possiamo a questo punto calcolare l'equazione di Eulero-Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \underline{\dot{Q}}} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \underline{Q}} &\iff m \underline{\ddot{Q}} + m \underline{\dot{V}} + m \underline{\dot{\Omega}} \wedge \underline{Q} + m \underline{\Omega} \wedge \underline{\dot{Q}} = -m \underline{\Omega} \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{Q}) \\ &\quad - m \underline{\Omega} \wedge \underline{V} - m \underline{\Omega} \wedge \underline{\dot{Q}} + \underline{F} \end{aligned}$$

le quali ci forniscono

$$m \underline{\ddot{Q}} = \underline{F} - m \underline{\dot{\Omega}} \wedge \underline{Q} - 2m \underline{\Omega} \wedge \underline{\dot{Q}} - m \underline{\Omega} \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{Q}) - m (\underline{\dot{V}} + \underline{\Omega} \wedge \underline{V}).$$

Equazioni del moto nel sistema mobile

Notazione. Le forze aggiunte a \underline{F} si dicono *forze fittizie*, in particolare:

- Il termine $-2m \underline{\Omega} \wedge \underline{\dot{Q}}$ si dice *forza di Coriolis*.
- Il termine $-m \underline{\Omega} \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{Q})$ si dice *forza centrifuga*.
- Il termine $-m \underline{\dot{\Omega}} \wedge \underline{Q}$ si dice *forza inerziale di rotazione*.
- Il termine $-m (\underline{\dot{V}} + \underline{\Omega} \wedge \underline{V})$ si dice *forza inerziale di traslazione*.

10 | CORPO RIGIDO

10.1 INTRODUZIONE

Definizione 10.1 – Corpo rigido

Un *corpo rigido* è una collezione di N punti materiali \underline{q}_i di masse m_i , le cui distanze reciproche sono costanti nel tempo, ovvero

$$|\underline{q}_i(t) - \underline{q}_j(t)| \equiv d_{ij}.$$

Notazione. La condizione che definisce i corpi rigidi prende il nome di *condizione di rigidità*.

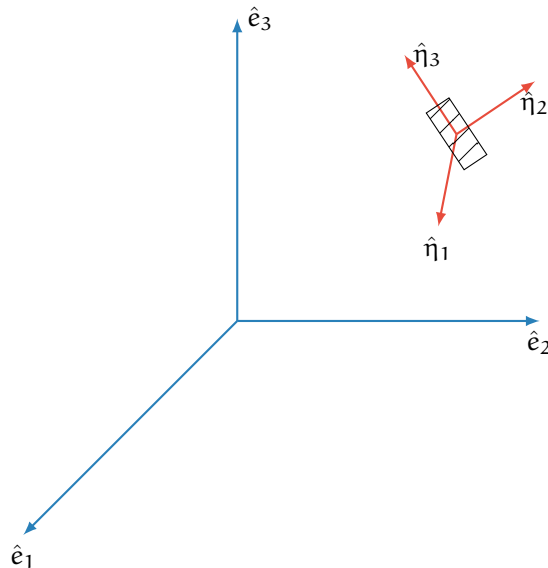
Definizione 10.2 – Sistema di riferimento solidale al corpo rigido

La condizione di rigidità implica l'esistenza di un *sistema mobile solidale al corpo*

$$K = (O', \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3),$$

tale che $\underline{\dot{Q}}_i = \underline{0}$ per ogni i .

Il sistema è rappresentato nella figura seguente:



Tramite il formalismo del precedente capitolo, possiamo scrivere le leggi di trasformazione per il nuovo sistema di riferimento:

$$\underline{q}_i = \underline{r} + B \underline{Q}_i \quad \text{e} \quad \dot{\underline{q}}_i = \dot{\underline{r}} + \underline{\omega} \wedge (\underline{q}_i - \underline{r}).$$

Leggi di trasformazioni del corpo rigido

Il nostro obiettivo è dedurre, tramite le leggi di trasformazione, le proprietà cinematiche del corpo rigido in una forma con cui sia possibile lavorare nella pratica. In particolare ci occuperemo di trovare formule per

- Energia cinetica.
- Quantità di moto.
- Momento angolare.

10.2 ENERGIA CINETICA

In un sistema di N corpi, l'energia cinetica è data da

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} |\dot{\underline{q}}_i|^2 \quad \text{con } \underline{q}_i \in \mathbb{R}^3.$$

In un corpo rigido, se i punti materiali sono descritti dagli atomi, $N \approx 10^{24}$, ciò rende impossibile lavorare direttamente con questa espressione di energia cinetica. Sfruttiamo la legge di trasformazione della velocità:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} |\dot{\underline{r}} + \underline{\omega} \wedge (\underline{q}_i - \underline{r})|^2 = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \left[|\dot{\underline{r}}|^2 + 2\dot{\underline{r}} \cdot (\underline{\omega} \wedge (\underline{q}_i - \underline{r})) + |\underline{\omega} \wedge (\underline{q}_i - \underline{r})|^2 \right].$$

Facciamo riferimento ai tre addendi della sommatoria rispettivamente con (A), (B) e (C) e cerchiamo di semplificarne le espressioni:

- (A) : detta M la massa totale, avremo

$$\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} |\dot{\underline{r}}|^2 = \frac{M}{2} |\dot{\underline{r}}|^2.$$

ovvero la somma delle masse

- (B) : portiamo $\dot{\underline{r}}$ fuori dalla sommatoria

$$\dot{\underline{r}} \cdot \left[\sum_{i=1}^N m_i (\underline{\omega} \wedge (\underline{q}_i - \underline{r})) \right] = \dot{\underline{r}} \cdot \left[\underline{\omega} \wedge \left(\sum_{i=1}^N m_i \underline{q}_i - \sum_{i=1}^N m_i \underline{r} \right) \right].$$

Ricordando che l'espressione della posizione baricentro è data da

$$\underline{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \underline{q}_i,$$

e sostituendo nella relazione precedente otteniamo

$$(B) = \dot{\underline{r}} \cdot (\underline{\omega} \wedge (M \underline{r}_G - M \underline{r})) = M \dot{\underline{r}} \cdot (\underline{\omega} \wedge (\underline{r}_G - \underline{r})).$$

In particolare osserviamo che una scelta opportuna del centro del sistema mobile è proprio il baricentro G , per cui

$$\underline{O}' = G \implies \underline{r} = \underline{r}_G \implies (B) = 0.$$

- (C) : passiamo nelle coordinate mobili

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\underline{\omega} \wedge (\underline{q}_i - \underline{r})|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\underline{B}(\underline{\Omega} \wedge \underline{Q}_i)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\underline{\Omega} \wedge \underline{Q}_i|^2,$$

ora

$$|\underline{\Omega} \wedge \underline{Q}_i|^2 = (\underline{\Omega} \wedge \underline{Q}_i) \cdot (\underline{\Omega} \wedge \underline{Q}_i) = [\underline{Q}_i \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{Q}_i)] \cdot \underline{\Omega},$$

inoltre, detto \underline{Q} un generico \underline{Q}_i , si ha

$$\underline{Q} \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{Q}) = \begin{pmatrix} Q_2^2 + Q_3^2 & -Q_1 Q_2 & -Q_1 Q_3 \\ -Q_1 Q_2 & Q_1^2 + Q_3^2 & -Q_2 Q_3 \\ -Q_1 Q_3 & -Q_2 Q_3 & Q_1^2 + Q_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = S \underline{\Omega}.$$

Dove osserviamo $S_{kl} = |\underline{Q}|^2 \delta_{k,l} - Q_k Q_l$. Per cui

$$(C) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \underline{\Omega} \cdot S_i \underline{\Omega} \quad \text{dove } (S_i)_{kl} = |\underline{Q}_i|^2 \delta_{k,l} - (\underline{Q}_i)_k (\underline{Q}_i)_l.$$

Introduciamo la *matrice d'inerzia* $I = \sum_{i=1}^N m_i S_i$ per ottenere l'espressione

$$(C) = \frac{1}{2} \underline{\Omega} \cdot I \underline{\Omega}.$$

Pertanto, preso $O' \equiv G$ il baricentro, deduciamo l'espressione dell'energia cinetica

$$T = \frac{M}{2} |\dot{\underline{r}}_G|^2 + \frac{1}{2} \underline{\Omega} \cdot I \underline{\Omega}.$$

Energia cinetica del corpo rigido

Il primo termine dell'equazione corrisponde al contributo dell'energia cinetica traslazionale del baricentro se identificato come una massa puntiforme di massa M . Il secondo termine corrisponde al contributo dell'energia cinetica rotazionale del corpo.

Osserviamo che, dal momento che S_i è reale e simmetrica, la matrice d'inerzia

$$I = \sum_{i=1}^N m_i S_i,$$

è a sua volta reale e simmetrica. Inoltre si mostra che I è definita positiva, infatti

$$\underline{u} \cdot S \underline{u} = \sum_{k,l=1}^3 u_k (|\underline{Q}|^2 \delta_{k,l} - Q_k Q_l) u_l = |\underline{Q}|^2 |\underline{u}|^2 - (\underline{Q} \cdot \underline{u})^2 \geq 0,$$

dove l'ultima disuguaglianza segue per Cauchy-Schwarz. Da ciò segue che I ammette una base ortonormale di autovettori $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3$ con autovalori I_1, I_2, I_3 .

Notazione. Gli autovalori I_1, I_2, I_3 si dicono *momenti principali di inerzia*, mentre le direzioni individuate da $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3$ si dicono *assi principali di inerzia*.

Questo ci fa intuire che è conveniente scegliere la terna del sistema di assi del sistema solidale, coincidente con gli assi principali di inerzia. Riepilogando il sistema mobile sarà

$$(O', \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3) \equiv (G, \hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3).$$

Con questa scelta, l'espressione dell'energia cinetica si semplifica ulteriormente:

$$T = \frac{1}{2} M |\dot{\underline{r}}_G|^2 + \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2)$$

Teorema di König

10.3 QUANTITÀ DI MOTO

La quantità di moto totale è data da

$$\underline{p} = \sum_{i=1}^N m_i \underline{\dot{q}}_i.$$

Ricordando che la velocità del baricentro è

$$\dot{\underline{r}}_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \underline{\dot{q}}_i,$$

si vede immediatamente che, indipendentemente dalla scelta del sistema mobile, la quantità di moto totale del sistema è la stessa che avrebbe una massa puntiforme di massa M nel baricentro, ovvero:

$$\underline{p} = M \dot{\underline{r}}_G.$$

Quantità di moto totale del corpo rigido

10.4 MOMENTO ANGOLARE

Supponiamo che il sistema mobile sia scelto in maniera opportuna con $O' \equiv G$, il momento angolare totale sarà dato da

$$\underline{l} = \sum_{i=1}^N m_i (\underline{q}_i - \underline{r}) \wedge \underline{\dot{q}}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\underline{q}_i - \underline{r}_G) \wedge \underline{\dot{q}}_i.$$

Applicando la legge di trasformazione per le velocità, si ottiene

$$\sum_{i=1}^N m_i (\underline{q}_i - \underline{r}_G) \wedge \dot{\underline{r}}_G + \sum_{i=1}^N m_i (\underline{q}_i - \underline{r}_G) \wedge [\underline{\omega} \wedge (\underline{q}_i - \underline{r}_G)].$$

Ora

$$\sum_{i=1}^N m_i (\underline{q}_i - \underline{r}_G) = \sum_{i=1}^N m_i \underline{q}_i - \underline{r}_G \sum_{i=1}^N m_i = M \underline{r}_G - M \underline{r}_G = \underline{0},$$

da cui

$$\sum_{i=1}^N m_i (\underline{q}_i - \underline{r}_G) \wedge \dot{\underline{r}}_G = \left[\sum_{i=1}^N m_i (\underline{q}_i - \underline{r}_G) \right] \wedge \dot{\underline{r}}_G = \underline{0}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \underline{l} &= \sum_{i=1}^N m_i (\underline{q}_i - \underline{r}_G) \wedge [\underline{\omega} \wedge (\underline{q}_i - \underline{r}_G)] = \mathbf{B} \sum_{i=1}^N m_i \underbrace{\underline{Q}_i \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{Q}_i)}_{S_i \underline{\Omega}} \\ &= \mathbf{B} \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i S_i}_{\mathbf{I}} \underline{\Omega} = \mathbf{B} \mathbf{I} \underline{\Omega} \end{aligned}$$

Ovvero

$$\underline{l} = \mathbf{B} \underline{\mathbf{L}} \quad \text{con } \underline{\mathbf{L}} = \mathbf{I} \underline{\Omega}.$$

Momento angolare totale del corpo rigido

Osservazione. In coordinate, la relazione $\underline{L} = I\underline{\Omega}$ è equivalente a

$$\begin{cases} L_1 = I_1\Omega_1 \\ L_2 = I_2\Omega_2 \\ L_3 = I_3\Omega_3 \end{cases}$$

Esempio (Corpo rigido con punto fisso). Questo caso speciale è interessante in quanto si presenta in diverse applicazioni. Un esempio tipico si ha con il *giroscopio* oppure con il *pendolo fisico*. In tale situazione è preferibile scegliere $O' \equiv O$ come il punto fisso del corpo rigido; la scelta delle direzioni del sistema mobile è sempre quella degli assi principali di inerzia. Così facendo le leggi di trasformazione sono

$$\underline{q}_i = B \underline{Q}_i \quad e \quad \dot{\underline{q}}_i = \underline{\omega} \wedge \underline{q}_i = B (\underline{\Omega} \wedge \underline{Q}_i).$$

Da cui discendono le tre equazioni della cinematica:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} |\underline{\Omega} \wedge \underline{Q}_i|^2 = \frac{1}{2} \underline{\Omega} \cdot I \underline{\Omega}; \\ \underline{p} &= M \dot{\underline{r}}_G; \\ \underline{l} &= B \underline{L} = I \underline{\Omega}. \end{aligned}$$

10.5 DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

Le equazioni della dinamica del corpo rigido, o equazioni di Eulero, sono due equazioni differenziali che descrivono il moto di un sistema di corpi, studiando il comportamento globale a prescindere da ciò che avviene per le singole componenti.

La prima equazione si ottiene derivando la quantità di moto totale del sistema:

$$\frac{d}{dt} \underline{p} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\underline{q}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\underline{q}}_i = \sum_{i=1}^N \underline{f}_i,$$

dove \underline{f}_i sono le forze agenti sulla singola componente. Decomponiamo tale forza nella sua parte esterna, attiva e conservativa e nella sua reazione vincolare:

$$\underline{f}_i = \underline{f}_i^{\text{ext}} + \underline{R}_i,$$

dove supporremo \underline{R}_i ideale nel senso del principio di D'Alembert. Pertanto si ottiene

$$\frac{d}{dt} \underline{p} = \underline{f}_{\text{TOT}}^{\text{ext}} + \underline{R}_{\text{TOT}}.$$

Dimostreremo che $\underline{R}_{\text{TOT}} = \underline{0}$: definiamo

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{q}_1 \\ \vdots \\ \underline{q}_N \end{pmatrix} \quad e \quad \underline{R} = \begin{pmatrix} \underline{R}_1 \\ \vdots \\ \underline{R}_N \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che, il principio di D'Alembert chiede che per ogni istante t_0 si abbia

$$\underline{R}(\underline{x}(t_0), \dot{\underline{x}}(t_0)) \cdot \underline{v} = 0,$$

dove \underline{v} è la *velocità virtuale*. Quest'ultima ricordiamo essere un vettore dello spazio tangente al vincolo in $\underline{x}(t_0)$ oppure, equivalentemente, la velocità di un altro "possibile moto" del corpo rigido, il quale passa per il punto $\underline{x}(t_0)$ al tempo t_0 . La strategia è scegliere un moto

virtuale adattato a dimostrare la nostra tesi. In particolare scegliamo

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{q}}_N(t) \end{pmatrix} \text{ dove } \tilde{\mathbf{q}}_i(t) = \mathbf{q}_i(t_0) + \alpha \hat{\mathbf{n}}_0(t - t_0) \implies \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \alpha(t - t_0) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{n}}_0 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{n}}_0 \end{pmatrix}$$

Da cui la velocità virtuale

$$\underline{\mathbf{v}} = \left. \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{x}}(t) \right|_{t=t_0} = \alpha \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{n}}_0 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{n}}_0 \end{pmatrix}$$

Per il principio di D'Alembert, avremo

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{x}(t_0), \dot{\mathbf{x}}(t_0)) \cdot \underline{\mathbf{v}} = 0 &\iff \alpha \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{n}}_0 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{n}}_0 \end{pmatrix} = 0 \iff 0 = \alpha \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}_0 = \alpha \hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i = \alpha \hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \mathbf{R}_{\text{TOT}} \\ &\implies \mathbf{R}_{\text{TOT}} = \underline{\mathbf{0}}. \end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere la prima legge di Eulero

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}_G = \underline{\mathbf{f}}_{\text{TOT}}^{\text{ext}}.$$

Prima legge di Eulero

La seconda legge si ottiene studiando la variazione del momento angolare $\underline{\mathbf{l}}$. Inizialmente si ottiene

$$\frac{d}{dt} \underline{\mathbf{l}} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{q}_i - \mathbf{r}_G) \wedge \dot{\mathbf{q}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{q}}_i \wedge \dot{\mathbf{q}}_i - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_G \wedge \dot{\mathbf{q}}_i + \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{q}_i - \mathbf{r}_G) \wedge \ddot{\mathbf{q}}_i,$$

dove il primo addendo è nullo poiché è nullo il prodotto vettoriale $\dot{\mathbf{q}}_i \wedge \dot{\mathbf{q}}_i$, il secondo è nullo in quanto

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_G \wedge \dot{\mathbf{q}}_i = \dot{\mathbf{r}}_G \wedge \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{q}}_i = \dot{\mathbf{r}}_G \wedge \mathbf{M} \dot{\mathbf{r}}_G = \underline{\mathbf{0}}.$$

Quindi

$$\frac{d}{dt} \underline{\mathbf{l}} = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{q}_i - \mathbf{r}_G) \wedge \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{q}_i - \mathbf{r}_G) \wedge \mathbf{f}_i.$$

Nuovamente scomponiamo la forza nella sua componente attiva e nella reazione vincolare

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i^{\text{ext}} + \mathbf{R}_i,$$

così da ottenere

$$\frac{d}{dt} \underline{\mathbf{l}} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{q}_i - \mathbf{r}_G) \wedge (\mathbf{f}_i^{\text{ext}} + \mathbf{R}_i) = \underline{\mathbf{n}}_{\text{TOT}}^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N (\mathbf{q}_i - \mathbf{r}_G) \wedge \mathbf{R}_i.$$

Vogliamo dimostrare che

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{q}_i - \mathbf{r}_G) \wedge \mathbf{R}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i \wedge \mathbf{R}_i = \underline{\mathbf{0}},$$

dove abbiamo già potuto eliminare la parte con \mathbf{r}_G in quanto, avendo dimostrato $\mathbf{R}_{\text{TOT}} = \underline{\mathbf{0}}$, si ha

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_G \wedge \mathbf{R}_i = \mathbf{r}_G \wedge \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i = \mathbf{r}_G \wedge \mathbf{R}_{\text{TOT}} = \underline{\mathbf{0}}.$$

Sfruttiamo nuovamente il principio di D'Alembert

$$\mathbf{R}(\underline{x}(t_0), \dot{\underline{x}}(t_0)) \cdot \underline{v} = 0,$$

dove, in quanto caso, scegliamo \underline{v} la velocità virtuale associata ad un moto virtuale sull'asse \hat{e}_3 :

$$\underline{\tilde{x}}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{q}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{q}_N(t) \end{pmatrix} \text{ dove } \tilde{q}_i(t) = q_i(t_0) + \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t-t_0)) & -\sin(\alpha(t-t_0)) & 0 \\ \sin(\alpha(t-t_0)) & \cos(\alpha(t-t_0)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{i,1}(t_0) \\ q_{i,2}(t_0) \\ q_{i,3}(t_0) \end{pmatrix}$$

da cui la velocità virtuale

$$\underline{v} = \left. \frac{d}{dt} \underline{\tilde{x}}(t) \right|_{t=t_0} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix},$$

dove

$$v_i = \left. \frac{d}{dt} \tilde{q}_i(t) \right|_{t=t_0} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{i,1}(t_0) \\ q_{i,2}(t_0) \\ q_{i,3}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_{i,2}(t_0) \\ q_{i,1}(t_0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da cui

$$\underline{0} = \mathbf{R} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \underline{v}_i = \sum_{i=1}^N \alpha (-R_{i,1} q_{i,2} + R_{i,2} q_{i,1}) = \alpha \sum_{i=1}^N (\underline{q}_i \wedge \mathbf{R}_i)_3.$$

Ripetendo il procedimento con velocità virtuali associate al moto virtuale sugli assi \hat{e}_1, \hat{e}_2 , si ottiene che

$$\sum_{i=1}^N (\underline{q}_i \wedge \mathbf{R}_i)_j = 0 \quad \forall j = 1, 2, 3 \implies \sum_{i=1}^N \underline{q}_i \wedge \mathbf{R}_i = \underline{0}.$$

Da cui la seconda legge di Eulero

$$\frac{d}{dt} \underline{l} = \underline{n}_{TOT}^{ext} \quad \text{dove } \underline{n}_{TOT}^{ext} = \sum_{i=1}^N (\underline{q}_i - \underline{r}_G) \wedge \underline{f}_i^{ext}.$$

Seconda legge di Eulero

Esempio. Studiamo il caso notevole in cui

$$\underline{f}_i^{ext} = m_i \underline{g} \implies \underline{f}_{TOT}^{ext} = \sum_{i=1}^N m_i \underline{g} = M \underline{g}.$$

Dalla prima legge di Eulero otteniamo

$$\underline{\dot{p}} = M \underline{\ddot{r}}_G = M \underline{g} \iff \underline{\ddot{r}}_G = \underline{g},$$

che ci fornisce la legge del moto

$$\underline{r}_G(t) = \underline{r}_G(0) + \dot{\underline{r}}_G(0) t + \frac{1}{2} \underline{g} t^2.$$

Dalla seconda legge otteniamo

$$\underline{n}_{TOT}^{ext} = \sum_{i=1}^N (\underline{q}_i - \underline{r}_G) \wedge m_i \underline{g} = \left[\sum_{i=1}^N m_i (\underline{q}_i - \underline{r}_G) \right] \wedge \underline{g} = \underline{0} \implies \frac{d}{dt} \underline{l} = \underline{0},$$

per cui il momento angolare è conservato. Questo caso corrisponde ad equazioni di rotazioni libere in assenza di forza esterna.

Nel caso in cui \underline{l} sia conservata e ricordando che

$$\underline{l} = \mathbf{B} \underline{L} = \mathbf{B} \mathbf{I} \underline{\Omega},$$

si ottiene

$$0 = \dot{\underline{l}} = \mathbf{B} \dot{\underline{L}} + \dot{\mathbf{B}} \underline{L} \iff \mathbf{B} (\dot{\underline{L}} + \underline{\Omega} \wedge \underline{L}) = \underline{0},$$

dove abbiamo sfruttato la relazione di $\dot{\mathbf{B}}$ con $\underline{\omega}$:

$$\dot{\mathbf{B}} \underline{L} = \dot{\mathbf{B}}^t \mathbf{B} \underline{L} = \mathbf{M} \underline{B} \underline{L} = \underline{\omega} \wedge \underline{B} \underline{L} = \mathbf{B} \underline{\Omega} \wedge \underline{B} \underline{L}.$$

Quindi

$$\frac{d}{dt} \underline{l} = 0 \iff \dot{\underline{L}} = \underline{L} \wedge \underline{\Omega} \iff \mathbf{I} \dot{\underline{\Omega}} = \mathbf{I} \underline{\Omega} \wedge \underline{\Omega},$$

che sono le cosiddette equazioni di Eulero

$$\begin{cases} I_1 \dot{\Omega}_1 = (I_2 - I_3) \Omega_2 \Omega_3 \\ I_2 \dot{\Omega}_2 = (I_3 - I_1) \Omega_3 \Omega_1 \\ I_3 \dot{\Omega}_3 = (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2 \end{cases}$$

Equazioni di Eulero

Osservazione. Si dimostra direttamente, che tali equazioni di Eulero ammettono le seguenti grandezze conservate

$$T_{\text{TOT}} = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2) \quad \text{e} \quad L^2 = I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2 + I_3^2 \Omega_3^2$$

Studiamo cosa succede quando \underline{l} si conserva e il sistema ha particolari simmetrie:

- Se $I_1 = I_2 = I_3 \neq 0$ allora

$$\mathbf{I} = I_1 \text{Id} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{pmatrix}$$

Ora \underline{l} è costante, inoltre

$$\underline{l} = \mathbf{B} (\mathbf{I} \underline{\Omega}) = \mathbf{B} (I_1 \text{Id} \underline{\Omega}) = I_1 (\mathbf{B} \underline{\Omega}) = I_1 \underline{\omega},$$

per cui $\underline{\omega}$ è costante e abbiamo pertanto un moto rotatorio uniforme.

- Se $I_1 = I_2 \neq 0$ e $I_3 = 0$, le equazioni di Eulero diventano

$$\begin{cases} I_1 \dot{\Omega}_1 = I_1 \Omega_2 \Omega_3 \\ I_1 \dot{\Omega}_2 = -I_1 \Omega_1 \Omega_3 \end{cases}$$

da cui

$$\mathbf{I} \underline{\Omega} = I_1 \text{Id} \tilde{\underline{\Omega}} \iff \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = I_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi possiamo applicare il ragionamento del caso precedente per ottenere

$$\underline{l} = I_1 \tilde{\underline{\omega}},$$

da cui $\tilde{\underline{\omega}}$ costante.

- Se $I_1 = I_2 \neq 0$ e $I_3 \neq 0$ il sistema è descritto da tre angoli, detti di Eulero. In particolare si hanno l'angolo ϑ di nutazione, l'angolo φ di precessione e l'angolo ψ di rotazione. Risolvendo esplicitamente le equazioni di Eulero si ottiene

$$\dot{\vartheta} = 0; \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{I_1}; \quad \dot{\psi} = L \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right) \cos \vartheta,$$

che corrisponde ad un moto complessivo quasi periodico, dove si ha un moto relativo a φ ed uno relativo a $d\psi$.

- Se $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq 0$ si ha il caso generale. Nel quale si avrà, oltre ad un moto di precessione e ad uno di rotazione, anche un moto di nutazione per via dell'andamento di ϑ .

Parte V

Meccanica Hamiltoniana

11 | FORMALISMO HAMILTONIANO

11.1 INTRODUZIONE

La meccanica hamiltoniana è una riformulazione della meccanica classica introdotta nel 1833 da William Rowan Hamilton a partire dalla meccanica lagrangiana, descritta inizialmente da Joseph-Louis Lagrange nel 1788. La dinamica di un sistema fisico è caratterizzata dal fatto che il moto di un corpo tende a rendere stazionaria (a variazione nulla) una quantità astratta detta azione, un funzionale definito come l'integrale nel tempo della lagrangiana. Solitamente questo corrisponde a minimizzare l'energia del sistema dinamico considerato, che è la somma dell'energia potenziale più l'energia cinetica. La meccanica hamiltoniana fa corrispondere all'energia una funzione scalare detta hamiltoniana, e le equazioni del moto di Eulero-Lagrange, che erano alla base della descrizione di Lagrange, vengono ora riscritte nello spazio delle fasi (grazie cioè ad una diversa scelta delle coordinate) nella forma di equazioni di Hamilton per l'hamiltoniana.

Nel contesto di questa trattazione considereremo una lagrangiana indipendente dal tempo

$$\mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) \quad \text{con } \underline{q}, \underline{\dot{q}} \in \mathbb{R}^n$$

e i momenti coniugati

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}).$$

Come già accennato, le equazioni di Hamilton sono una riformulazione delle equazioni di Eulero-Lagrange, in particolare sono una riformulazione in termini di \underline{q} e \underline{p} .

Definizione 11.1 – Lagrangiana regolare

La lagrangiana $\mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$ si dice *regolare* se i momenti coniugati \underline{p} sono invertibili rispetto a $\underline{\dot{q}}$, ovvero se possiamo scrivere

$$\underline{\dot{q}} = \underline{F}(\underline{q}, \underline{p}).$$

Osservazione. Il caso tipico di maggiore interesse per le applicazioni è quello in cui $\mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$ è convessa nelle $\underline{\dot{q}}$ per ogni \underline{q} fissato. Nel qual caso \mathcal{L} è regolare.

Esempio. • Consideriamo la lagrangiana meccanica:

$$\mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \frac{m}{2} |\underline{\dot{q}}|^2 - U(\underline{q})$$

i suoi momenti coniugati saranno

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = m \dot{q}_i \implies \underline{p} = m \underline{\dot{q}}.$$

In particolare

$$\underline{p} = m \underline{\dot{q}} \iff \underline{\dot{q}} = \frac{1}{m} \underline{p} = \underline{F}(\underline{q}, \underline{p}).$$

Quindi \mathcal{L} è regolare.

- Consideriamo la tipica lagrangiana meccanica in presenza di vincoli:

$$\mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}} \cdot \mathbf{M}(\underline{q}) \underline{\dot{q}} - \mathbf{U}(\underline{q}) \quad \text{con } \mathbf{M}(\underline{q}) > 0.$$

Analogamente al caso precedente avremo

$$\underline{p} = \mathbf{M}(\underline{q}) \underline{\dot{q}} \iff \underline{\dot{q}} = \mathbf{M}^{-1}(\underline{q}) \underline{p},$$

ovvero anche questa \mathcal{L} è regolare.

Definizione 11.2 – Funzione di Hamilton

La *funzione di Hamilton* $\mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p})$, o *hamiltoniana*, è l'espressione dell'energia generalizzata scritta in termini di \underline{q} e \underline{p} , ovvero

$$\mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p}) = \underline{F}(\underline{q}, \underline{p}) \cdot \underline{p} - \mathcal{L}(\underline{q}, \underline{F}(\underline{q}, \underline{p})).$$

Osservazione. Come detto la definizione discende direttamente dall'espressione dell'energia generalizzata

$$E = \underline{\dot{q}} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\dot{q}}} - \mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}).$$

Da cui, sostituendo

$$\underline{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\dot{q}}} \quad \text{e} \quad \underline{F}(\underline{q}, \underline{p}) = \underline{\dot{q}},$$

si ottiene l'espressione di $\mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p})$.

Esempio. Consideriamo le lagrangiane dell'esempio precedente e calcoliamo la funzione di Hamilton:

- Consideriamo la lagrangiana

$$\mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \frac{m}{2} |\underline{\dot{q}}|^2 - \mathbf{U}(\underline{q}),$$

allora

$$\mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p}) = \frac{1}{m} \underline{p} \cdot \underline{p} - \left(\frac{m}{2} \frac{|\underline{p}|^2}{m^2} - \mathbf{U}(\underline{q}) \right) = \frac{1}{2m} |\underline{p}|^2 + \mathbf{U}(\underline{q}).$$

- Consideriamo la lagrangiana

$$\mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}} \cdot \mathbf{M}(\underline{q}) \underline{\dot{q}} - \mathbf{U}(\underline{q}) \quad \text{con } \mathbf{M}(\underline{q}) > 0,$$

allora

$$\mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p}) = \underline{p} \cdot \mathbf{M}^{-1}(\underline{q}) \underline{p} - \left(\frac{1}{2} \underline{p} \cdot \mathbf{M}^{-1}(\underline{q}) \underline{p} - \mathbf{U}(\underline{q}) \right) = \frac{1}{2} \underline{p} \cdot \mathbf{M}^{-1}(\underline{q}) \underline{p} + \mathbf{U}(\underline{q}).$$

Proposizione 11.3 – \mathcal{H} come trasformata di Legendre di \mathcal{L}

La funzione di Hamilton \mathcal{H} è esprimibile come trasformata di Legendre della lagrangiana \mathcal{L} a cui è associata.

Dimostrazione. Consideriamo la combinazione

$$\underline{p} \cdot \underline{v} - \mathcal{L}(\underline{q}, \underline{v})$$

e pensiamo ad essa come funzione delle \underline{v} a $(\underline{q}, \underline{p})$ fissate. I punti stazionari di tale combinazione corrispondono alle soluzioni di

$$\frac{\partial}{\partial \underline{v}} [\underline{p} \cdot \underline{v} - \mathcal{L}(\underline{q}, \underline{v})] = 0,$$

ovvero

$$\underline{p} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{v}}(\underline{q}, \underline{v}) = 0 \iff \underline{v} = \underline{F}(\underline{q}, \underline{p})$$

quando \mathcal{L} è regolare. Studiamo la natura del punto di stazionarietà $\underline{v} = \underline{F}(\underline{q}, \underline{p})$: se \mathcal{L} è convessa nelle \underline{q} e \underline{p} fissate, allora $\underline{p} \cdot \underline{v} - \mathcal{L}(\underline{q}, \underline{v})$ è concava nelle \underline{v} e $(\underline{q}, \underline{p})$ fissate. Pertanto, se $\underline{p} \cdot \underline{v} - \mathcal{L}$ ammette un unico punto di stazionarietà, allora tale punto è un massimo globale e il suo valore sul punto di massimo è

$$\underline{p} \cdot \underline{F}(\underline{q}, \underline{p}) - \mathcal{L}(\underline{q}, \underline{F}(\underline{q}, \underline{p})) = \mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p}).$$

Per cui possiamo scrivere

$$\mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p}) = \max_{\underline{v}} \{ \underline{p} \cdot \underline{v} - \mathcal{L}(\underline{q}, \underline{v}) \}$$

che è proprio la trasformata di Legendre di \mathcal{L} . □

Osservazione. Dal momento che la \mathcal{L} è convessa, la trasformata di Legendre è invertibile e la sua inversa è essa stessa una trasformata di Legendre, in particolare si ha

$$\mathcal{L}(\underline{q}, \underline{v}) = \max_{\underline{p}} \{ \underline{p} \cdot \underline{v} - \mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p}) \}.$$

Si dimostra (noi non lo faremo) che la trasformata di Legendre è ben definita per funzioni $\mathcal{L}(\underline{q}, \underline{v})$ convesse nelle \underline{v} per ogni \underline{q} fissato.

11.2 EQUAZIONI DI HAMILTON E TEOREMA DI LIOUVILLE

Le equazioni di Hamilton sono le equivalenti delle equazioni di Eulero-Lagrange per la lagrangiana $\mathcal{L}(\underline{q}, \dot{\underline{q}})$, una volta che quest'ultima sia legata all'hamiltoniana \mathcal{H} dalla relazione

$$\mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p}) = \underline{F}(\underline{q}, \underline{p}) \cdot \underline{p} - \mathcal{L}(\underline{q}, \underline{F}(\underline{q}, \underline{p})).$$

Tali equazioni si derivano a partire da \mathcal{H} derivando nelle sue componenti. Cominciamo derivando nelle componenti q_i :

applicando le equazioni di E-L

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \frac{\partial \underline{F}}{\partial q_i} \cdot \underline{p} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}_{\underline{p}} \cdot \frac{\partial \underline{F}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{d}{dt} p_i$$

da cui si ottiene la prima delle due equazioni

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}.$$

La seconda si ottiene analogamente derivando rispetto a p_i :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{\partial \underline{F}}{\partial p_i} \cdot \underline{p} + F_i(\underline{q}, \underline{p}) - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}_{\underline{p}} \cdot \frac{\partial \underline{F}}{\partial p_i} = F_i(\underline{q}, \underline{p}) = \dot{q}_i$$

da cui si ottiene la seconda equazione

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}.$$

In forma compatta troviamo l'espressione delle equazioni di Hamilton:

$$\underline{\dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}} \quad \text{e} \quad \underline{\dot{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q}}.$$

Equazioni di Hamilton

Definizione 11.4 – Campo vettoriale hamiltoniano

Consideriamo la funzione di Hamilton $\mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p})$. Detto $\underline{x} = (\underline{q}, \underline{p}) \in \mathbb{R}^{2n}$, definiamo il *campo vettoriale hamiltoniano* come segue:

$$\underline{f}_{\mathcal{H}}: \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}, \underline{x} \longmapsto \dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}} \\ -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q}} \end{pmatrix}$$

che ha come componenti le equazioni di Hamilton.

Osservazione. Possiamo riscrivere

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}} \\ -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}} \end{pmatrix} = J \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{x}},$$

dove J è detta *matrice simplettica standard*. Possiamo quindi ridefinire le equazioni di Hamilton tramite una scrittura compatta:

$$\begin{cases} \dot{\underline{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}} \\ \dot{\underline{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q}} \end{cases} \iff \dot{\underline{x}} = \underline{f}_{\mathcal{H}}(\underline{x}) = J \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{x}}$$

Proposizione 11.5 – Campo vettoriale hamiltoniano ha divergenza nulla

Consideriamo il campo vettoriale hamiltoniano $\underline{f}_{\mathcal{H}}$. Allora

$$\text{div} \underline{f}_{\mathcal{H}} = 0.$$

Dimostrazione. Tramite la scrittura compatta delle equazioni di Hamilton, mostriamo che $\underline{f}_{\mathcal{H}}$ è a divergenza nulla, ovvero che

$$\text{div} \underline{f}_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial f_{\mathcal{H},i}}{\partial x_i} = 0.$$

Infatti

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial f_{\mathcal{H},i}}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0 \quad \square$$

Teorema 11.6 – di Liouville

Il flusso hamiltoniano preserva il volume dello spazio delle fasi, nel senso seguente: dato $A \subseteq \mathbb{R}^{2n}$, sia $\varphi_t(A)$ il suo evoluto al tempo t , allora

$$\text{Vol}(A) = \text{Vol}(\varphi_t(A)) \quad \text{dove } \text{Vol}(A) = \int_A d^{2n}\underline{x}$$

Notazione. Con l'evoluto $\varphi_t(A)$ al tempo t intendiamo

$$\varphi_t(A) = \{ \varphi_t(\underline{x}) \mid \underline{x} \in A \},$$

dove $\varphi_t(\underline{x})$ è la soluzione di $\dot{\underline{x}} = \underline{f}_{\mathcal{H}}(\underline{x})$ con dato iniziale $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$.

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che

$$\text{Vol}(\varphi_t(A)) = \text{Vol}(A) \iff \int_{\varphi_t(A)} d^{2n}\underline{x}' = \int_A d^{2n}\underline{x}.$$

Scriviamo $\underline{x}' = \varphi_t(\underline{x})$ ed eseguiamo un cambio di variabile all'interno dell'integrale:

$$\int_{\varphi_t(A)} d^{2n}\underline{x}' = \int_A |\det M(t, \underline{x})| d^{2n}\underline{x},$$

dove $M(t, \underline{x})$ è la matrice jacobiana associata alla mappa del cambio di variabile, in particolare

$$M_{ij}(t, \underline{x}) = \frac{\partial \varphi_{t,i}}{\partial x_j}(\underline{x}).$$

Quindi, per dimostrare la tesi, è sufficiente dimostrare che $\det M(t, \underline{x}) \equiv 1$. Innanzitutto osserviamo che

$$\varphi_0(\underline{x}) = \underline{x} \implies M(0, \underline{x}) = \text{Id} \implies \det M(0, \underline{x}) = 1.$$

Pertanto, se mostriamo che $\det M$ è costante in t avremo proprio che $\det M \equiv 1$. Dobbiamo quindi mostrare che

$$\frac{d}{dt} \det M(t, \underline{x}) = 0.$$

Scriviamo l'espressione del rapporto incrementale per studiare la derivata. Ora

$$M_{ij}(t + dt, \underline{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_{t+dt,i}(\underline{x}),$$

dove

$$\varphi_{t+dt}(\underline{x}) = \underline{x}(t + dt) = \underline{x}(t) + \dot{\underline{x}} dt = \underline{x}(t) + \underline{f}_{\mathcal{H}}(\underline{x}(t)) dt = \varphi_t(\underline{x}) + \underline{f}_{\mathcal{H}}(\varphi_t(\underline{x})) dt.$$

Pertanto

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_{t+dt,i}(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_{t,i}(\underline{x}) + \frac{\partial \underline{f}_{\mathcal{H},i}}{\partial x_j}(\varphi_t(\underline{x})) dt,$$

quindi

$$\begin{aligned} M_{ij}(t + dt, \underline{x}) &= M_{ij}(t, \underline{x}) + \frac{\partial \underline{f}_{\mathcal{H},i}}{\partial x_j}(\varphi_t(\underline{x})) dt = M_{ij}(t, \underline{x}) + dt \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial \underline{f}_{\mathcal{H},i}}{\partial x_k}(\varphi_t(\underline{x})) \frac{\partial \varphi_{t,k}}{\partial x_j}(\underline{x}) \\ &= M_{ij}(t, \underline{x}) + \sum_{k=1}^{2n} A_{ik}(t, \underline{x}) M_{kj}(t, \underline{x}) dt. \end{aligned}$$

Riepilogando

$$M(\mathbf{t} + dt, \underline{x}) = M(\mathbf{t}, \underline{x}) + A(\mathbf{t}, \underline{x}) M(\mathbf{t}, \underline{x}) dt = (\text{Id} + A(\mathbf{t}, \underline{x}) dt) M(\mathbf{t}, \underline{x}).$$

Da cui otteniamo

$$\det M(\mathbf{t} + dt, \underline{x}) = \det (\text{Id} + A(\mathbf{t}, \underline{x}) dt) \det M(\mathbf{t}, \underline{x}).$$

Cerchiamo ora l'espressione di $\det (\text{Id} + A dt)$ a meno di termini di ordine superiore al primo, i quali sono ininfluenti nel calcolo della derivata. Ora

$$(\text{Id} + A dt)_{ij} = \delta_{i,j} + A_{ij} dt,$$

da cui si dimostra facilmente che

$$\det (\text{Id} + A dt) = 1 + (A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn}) dt + \mathcal{O}(dt^2) = 1 + \text{Tr} A dt + \mathcal{O}(dt^2).$$

Quindi

$$\det M(\mathbf{t} + dt, \underline{x}) = (1 + \text{Tr} A(\mathbf{t}, \underline{x}) dt) \det M(\mathbf{t}, \underline{x}),$$

da cui

$$\frac{d}{dt} \det M(\mathbf{t}, \underline{x}) = \frac{\det M(\mathbf{t} + dt, \underline{x}) - \det M(\mathbf{t}, \underline{x})}{dt} = \text{Tr} A(\mathbf{t}, \underline{x}) \det M(\mathbf{t}, \underline{x}) = 0,$$

in quanto

$$\text{Tr} A = A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial f_{\mathcal{H},i}}{\partial x_i} = \text{div} \underline{f}_{\mathcal{H}} = 0.$$

Quindi

$$\text{Vol}(\varphi_t(A)) = \int_{\varphi_t(A)} d^{2n} \underline{x}' = \int_A |\det M(\mathbf{t}, \underline{x})| d^{2n} \underline{x} = \int_A d^{2n} \underline{x} = \text{Vol}(A). \quad \square$$

11.3 PARENTESI DI POISSON

Definizione 11.7 – Osservabile sullo spazio delle fasi

Un'osservabile sullo spazio delle fasi è una funzione f in funzione delle \underline{q} e \underline{p} :

$$f = f(\underline{q}, \underline{p}).$$

Definizione 11.8 – Parentesi di Poisson

Date due osservabili $f = f(\underline{q}, \underline{p})$ e $g = g(\underline{q}, \underline{p})$, definiamo come *parentesi di Poisson* di f e g l'operazione seguente:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial \underline{q}} \cdot \frac{\partial g}{\partial \underline{p}} - \frac{\partial f}{\partial \underline{p}} \cdot \frac{\partial g}{\partial \underline{q}}.$$

Osservazione. Fissato f , la parentesi di Poisson $\{f, g\}$, può essere vista come un operatore differenziale $D(f)$ dipendente da f e applicato a g , infatti:

$$\{f, g\} = \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{p}} - \frac{\partial f}{\partial \underline{p}} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{q}} \right) g$$

Esempio (Parentesi di Poisson fondamentali). Se $f = q_i$ si ha

$$\{q_i, g\} = \frac{\partial}{\partial p_i} g.$$

Analogamente se $f = p_i$ si ha

$$\{p_i, g\} = -\frac{\partial}{\partial q_i} g.$$

Nel caso speciale in cui anche $g = q_j$ oppure $g = p_j$ si hanno

$$\{q_i, q_j\} = 0; \quad \{p_i, p_j\} = 0; \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{i,j}.$$

Queste relazioni prendono il nome di *parentesi di Poisson fondamentali*.

Proposizione 11.9 – Evoluzione temporale di un'osservabile

Sia $f = f(\underline{q}, \underline{p})$ un osservabile e supponiamo che $(\underline{q}(t), \underline{p}(t))$ sia una soluzione delle equazioni di Hamilton per l'hamiltoniana $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p})$. Allora l'evoluzione temporale di f è data dalla seguente legge

$$\dot{f} = \{f, \mathcal{H}\}.$$

Dimostrazione. L'osservabile f al tempo t sarà descritta da $f(\underline{q}(t), \underline{p}(t))$, per cui la sua legge di evoluzione sarà la seguente:

$$\frac{d}{dt} f(\underline{q}(t), \underline{p}(t)) = \frac{\partial f}{\partial \underline{q}} \cdot \dot{\underline{q}}(t) + \frac{\partial f}{\partial \underline{p}} \cdot \dot{\underline{p}}(t).$$

Ora, se $(\underline{q}(t), \underline{p}(t))$ sono una soluzione delle equazioni di Hamilton, posso sostituire $\dot{\underline{q}}$ e $\dot{\underline{p}}$ nell'espressione precedente, ottenendo

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{q}} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}} - \frac{\partial f}{\partial \underline{p}} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q}} = \{f, \mathcal{H}\}. \quad \square$$

Di seguito elenchiamo alcune proprietà elementari delle parentesi di Poisson, date $f = f(\underline{q}, \underline{p})$ e $g = g(\underline{q}, \underline{p})$ due osservabili.

Proprietà 11.10. Antisimmetria:

$$\{f, g\} = -\{g, f\}.$$

Proprietà 11.11. Multilinearità:

$$\{f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2\} = \lambda_1 \{f, g_1\} + \lambda_2 \{f, g_2\}.$$

Osservazione. La multilinearità vale per entrambi gli argomenti.

Proprietà 11.12. Regola del prodotto:

$$\{f, g_1 g_2\} = \{f, g_1\} g_2 + \{f, g_2\} g_1.$$

Osservazione. Questa regola è analoga alla regola di derivazione del prodotto di Leibniz. Tale analogia è dovuta alla struttura di operatore differenziale delle parentesi di Poisson.

Proprietà 11.13. Identità di Jacobi per tre osservabili f, g, h :

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

Proposizione 11.14 – Caratterizzazione degli integrali primi come osservabili

Sia $f = f(\underline{q}, \underline{p})$ un'osservabile e supponiamo che $(\underline{q}(t), \underline{p}(t))$ sia una soluzione delle equazioni di Hamilton per l'hamiltoniana \mathcal{H} . Allora f è un integrale primo se e soltanto se

$$\frac{d}{dt}f(\underline{q}(t), \underline{p}(t)) = 0 \iff \{f, \mathcal{H}\} = 0.$$

Proposizione 11.15 – Costruzione di un integrale primo a partire da altri due

Supponiamo che $f = f(\underline{q}, \underline{p})$ e $g = g(\underline{q}, \underline{p})$ siano due integrali primi rispetto all'hamiltoniana \mathcal{H} . Allora

$$\{f, g\}$$

è a sua volta un integrale primo.

Dimostrazione. Dalla proposizione precedente, f, g sono integrali primi se e soltanto se

$$\{f, \mathcal{H}\} = 0 \quad \text{e} \quad \{g, \mathcal{H}\} = 0.$$

Pertanto, applicando l'identità di Jacobi, otteniamo

$$\{\{f, g\}, \mathcal{H}\} = -\{\mathcal{H}, \{f, g\}\} = \{f, \{g, \mathcal{H}\}\} + \{g, \{\mathcal{H}, f\}\} = \{f, 0\} + \{g, 0\} = 0,$$

per cui $\{f, g\}$ è un integrale primo. □

12 | CALCOLO DELLE VARIAZIONI E TRASFORMAZIONI CANONICHE

12.1 PRINCIPIO DI VARIAZIONE DI HAMILTON

Ricordiamo che le equazioni di Eulero-Lagrange rendono stazionaria l'azione

$$A_{t_1, t_2}^{\mathcal{L}}[\underline{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t)) dt.$$

D'altronde, sappiamo che tali equazioni sono equivalenti alle equazioni di Hamilton. Pertanto è lecito chiedersi quale azione renderanno stazionaria tali equazioni.

Definizione 12.1 – Azione di Hamilton

Consideriamo l'hamiltoniana $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p})$. L'azione di Hamilton associata ad \mathcal{H} è definita come

$$S_{t_1, t_2}^{\mathcal{H}}[(\underline{q}(t), \underline{p}(t))] = \int_{t_1}^{t_2} [\underline{p}(t) \cdot \dot{\underline{q}}(t) - \mathcal{H}(\underline{q}(t), \underline{p}(t))] dt$$

Definizione 12.2 – Variazioni di Hamilton

Definiamo una *variazione* di $(\underline{q}(t), \underline{p}(t))$ come

$$(\underline{q}(t), \underline{p}(t)) + (\underline{u}_\varepsilon(t), \underline{v}_\varepsilon(t)) = (\underline{q}(t) + \underline{v}_\varepsilon(t), \underline{p}(t) + \underline{v}_\varepsilon(t)),$$

dove $\underline{u}_\varepsilon, \underline{v}_\varepsilon$ sono tali che

$$\begin{aligned} \underline{u}_0(t) &\equiv \underline{0} \\ \underline{v}_0(t) &\equiv \underline{0} \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \underline{u}_\varepsilon(t_1) &= \underline{u}_\varepsilon(t_2) = \underline{0} \\ \underline{v}_\varepsilon(t_1) &= \underline{v}_\varepsilon(t_2) = \underline{0} \end{aligned}$$

Notazione. Abbiamo considerato $(\underline{q}(t), \underline{p}(t))$ sullo spazio dei moti in \mathbb{R}^{2n} sull'intervallo temporale $[t_1, t_2]$ ed estremi fissati

$$(\underline{q}_1, \underline{p}_1) = (\underline{q}(t_1), \underline{p}(t_1)) \quad \text{e} \quad (\underline{q}_2, \underline{p}_2) = (\underline{q}(t_2), \underline{p}(t_2)).$$

Teorema 12.3 – Stazionarietà del funzionale hamiltoniano

Il moto $(\underline{q}(t), \underline{p}(t))$ inteso come nella notazione precedente, è soluzione delle equazioni di Hamilton se e soltanto se $(\underline{q}(t), \underline{p}(t))$ rende stazionaria l'azione

$$S_{t_1, t_2}^{\mathcal{H}}[(\underline{q}(t), \underline{p}(t))]$$

rispetto a variazioni $(\underline{q}(t) + \underline{v}_\varepsilon(t), \underline{p}(t) + \underline{v}_\varepsilon(t))$.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga al caso lagrangiano. Forniamo una traccia di dimostrazione che mostra come manipolare il funzionale d'azione. Ricordiamo che la condizione di stazionarietà dell'azione è data da

$$\frac{d}{d\varepsilon} S_{t_1, t_2}^{\mathcal{H}} [(\underline{q}(t) + \underline{v}_\varepsilon(t), \underline{p}(t) + \underline{v}_\varepsilon(t))] \Big|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Sviluppiamo $S_{t_1, t_2}^{\mathcal{H}}$ per ottenere

$$\frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} [(\underline{p}(t) + \underline{v}_\varepsilon(t)) \cdot (\dot{\underline{q}}(t) + \dot{\underline{u}}_\varepsilon(t)) - \mathcal{H}(\underline{q}(t) + \underline{u}_\varepsilon(t), \underline{p}(t) + \underline{v}_\varepsilon(t))] dt \Big|_{\varepsilon=0}.$$

È conveniente definire la seguente notazione:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \underline{u}_\varepsilon(t) \Big|_{\varepsilon=0} = \underline{z}(t) \quad \text{e} \quad \frac{d}{d\varepsilon} \underline{v}_\varepsilon(t) \Big|_{\varepsilon=0} = \underline{w}(t).$$

Da cui, portando la derivata dentro l'integrale e sostituendo, si ottiene

$$\int_{t_1}^{t_2} [\underline{w}(t) \cdot \dot{\underline{q}}(t) + \underline{p}(t) \cdot \dot{\underline{z}}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q}}(\underline{q}(t), \underline{p}(t)) \cdot \underline{z}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}}(\underline{q}(t), \underline{p}(t)) \cdot \underline{w}(t)] dt.$$

Osserviamo che, per le condizioni date su $\underline{u}_\varepsilon$ e $\underline{v}_\varepsilon$ si ha

$$\underline{z}(t_1) = \underline{z}(t_2) = \underline{0} \quad \text{e} \quad \underline{w}(t_1) = \underline{w}(t_2) = \underline{0}.$$

Integrando per parti il secondo addendo dell'integrale, otteniamo

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{p}(t) \cdot \dot{\underline{z}}(t) dt = \underbrace{\underline{p}(t) \cdot \underline{z}(t)}_{=0} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{\underline{p}}(t) \cdot \underline{z}(t) dt.$$

Quindi, sostituendo nell'espressione di partenza, avremo

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\underline{z}(t) \cdot \left(-\dot{\underline{p}}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q}}(\underline{q}(t), \underline{p}(t)) \right) + \underline{w}(t) \cdot \left(\dot{\underline{q}}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}}(\underline{q}(t), \underline{p}(t)) \right) \right] dt.$$

Da questa espressione è chiaro che se $(\underline{q}(t), \underline{p}(t))$ soddisfano le equazioni di Hamilton, allora l'integrale è nullo e l'azione è resa stazionaria. Per mostrare il viceversa rifarsi alla dimostrazione analoga nel caso lagrangiano. \square

Definizione 12.4 – Forma differenziale di Poincarè-Cartan

Consideriamo l'azione sull'hamiltoniana $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p})$, allora possiamo scrivere

$$S_{t_1, t_2}^{\mathcal{H}} = \int (\underline{p} \cdot d\underline{q} - \mathcal{H} dt)$$

che in questa forma prende il nome di *forma differenziale di Poincarè-Cartan*.

Osservazione. La scrittura dell'integranda come forma differenziale segue da

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{p}(t) \cdot \dot{\underline{q}}(t) dt = \int_{(\underline{q}_1, \underline{p}_1) \rightarrow (\underline{q}_2, \underline{p}_2)} \underline{p} \cdot d\underline{q}.$$

Definizione 12.5 – Invariante integrale di Poincarè-Cartan

Si definisce *invariante integrale di Poincarè-Cartan*, l'integrale della forma differenziale di Poincarè-Cartan lungo una curva chiusa $\gamma \in \mathbb{R}^{2n}$ al tempo fissato $t \equiv t_0$, dove si ha

$$S_{t_1, t_2}^{\mathcal{H}} = \oint_{\gamma} \underline{p} \cdot d\underline{q}.$$

Osservazione. In generale, integrando la forma differenziale lungo una curva γ qualsiasi, si ha

$$\int (\underline{p} \cdot d\underline{q} - \mathcal{H} dt) = \int_{\gamma} \underline{p} \cdot d\underline{q} = \int_a^b \underline{p}(\tau) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \underline{q}(\tau) d\tau.$$

Proposizione 12.6 – Invariante di Poincarè-Cartan si conserva

L'invariante integrale di Poincarè-Cartan è un integrale primo del moto, per qualsiasi curva chiusa γ .

Dimostrazione. Definiamo

$$I_{\gamma}(0) = \oint_{\gamma} \underline{p} \cdot d\underline{q} = \int_0^{2\pi} \underline{p}(\vartheta) \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \underline{q}(\vartheta) d\vartheta,$$

dove ϑ è una variabile angolare e $\underline{q}(\vartheta), \underline{p}(\vartheta)$ sono funzioni periodiche di periodo 2π . Da cui

$$I_{\gamma}(t) = \oint_{\varphi_t(\gamma)} \underline{p} \cdot d\underline{q} \quad \text{con } \varphi_t(\gamma) = (\underline{Q}_t(\vartheta), \underline{P}_t(\vartheta))_{\vartheta \in [0, 2\pi]},$$

dove $(\underline{Q}_t(\vartheta), \underline{P}_t(\vartheta)) = \varphi_t(\underline{q}(\vartheta), \underline{p}(\vartheta))$. Da cui

$$I_{\gamma}(t) = \oint_{\varphi_t(\gamma)} \underline{p} \cdot d\underline{q} = \int_0^{2\pi} \underline{P}_t(\vartheta) \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \underline{Q}_t(\vartheta) d\vartheta.$$

Affinché l'invariante di Poincarè-Cartan sia un integrale primo, dobbiamo dimostrare che

$$\frac{d}{dt} I_{\gamma}(t) = 0.$$

Ora, sfruttando le equazioni di Hamilton, otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_{\gamma}(t) &= \int_0^{2\pi} \left[\dot{\underline{P}}_t(\vartheta) \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \underline{Q}_t(\vartheta) + \underline{P}_t(\vartheta) \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \dot{\underline{Q}}_t(\vartheta) \right] d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q}}(\underline{Q}_t(\vartheta), \underline{P}_t(\vartheta)) \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \underline{Q}_t(\vartheta) + \underline{P}_t(\vartheta) \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}}(\underline{Q}_t(\vartheta), \underline{P}_t(\vartheta)) \right] d\vartheta. \end{aligned}$$

Integriamo per parti il secondo addendo dell'integranda:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \underline{P}_t(\vartheta) \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}}(\underline{Q}_t(\vartheta), \underline{P}_t(\vartheta)) d\vartheta &= \underbrace{\underline{P}_t(\vartheta) \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}}(\underline{Q}_t(\vartheta), \underline{P}_t(\vartheta))}_{=0} \Big|_0^{2\pi} \\ &\quad - \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \underline{P}_t(\vartheta) \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q}}(\underline{Q}_t(\vartheta), \underline{P}_t(\vartheta)) d\vartheta. \end{aligned}$$

Da cui

$$\frac{d}{dt} I_{\gamma}(t) = - \int_0^{2\pi} \left[\frac{d}{d\vartheta} \mathcal{H}(\underline{Q}_t(\vartheta), \underline{P}_t(\vartheta)) \right] d\vartheta = -\mathcal{H}(\underline{Q}_t(\vartheta), \underline{P}_t(\vartheta)) \Big|_0^{2\pi} = 0. \quad \square$$

12.2 TRASFORMAZIONI CANONICHE E FUNZIONI GENERATRICI

Supponiamo di avere una trasformazione $(\underline{q}, \underline{p}) \longleftrightarrow (\underline{Q}, \underline{P})$ invertibile definita dalle leggi

$$\begin{cases} \underline{Q} = \underline{Q}(\underline{q}, \underline{p}) \\ \underline{P} = \underline{P}(\underline{q}, \underline{p}) \end{cases} \iff \begin{cases} \underline{q} = \underline{q}(\underline{Q}, \underline{P}) \\ \underline{p} = \underline{p}(\underline{Q}, \underline{P}) \end{cases} \quad (1)$$

Ci domandiamo se soluzioni delle equazioni di Hamilton, rispetto ad un'hamiltoniana $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p})$, vengano mappate tramite (1) in soluzioni delle equazioni di Hamilton rispetto all'hamiltoniana

$$\tilde{\mathcal{H}}(\underline{Q}, \underline{P}) = \mathcal{H}(\underline{q}(\underline{Q}, \underline{P}), \underline{p}(\underline{Q}, \underline{P})).$$

La formulazione di questa domanda è naturale in quanto ciò avviene, in maniera analoga, nel contesto lagrangiano. D'altronde la risposta a questo quesito è, in generale, negativa. Il motivo di ciò risiede nella differente richiesta che viene fatta, per la scelta delle leggi di trasformazione, rispetto al caso lagrangiano; in quest'ultimo la trasformazione riguardava solo le posizioni, le velocità erano infatti trasformate di conseguenza. Nel caso hamiltoniano, le leggi di trasformazione riguardano sia le posizioni che i momenti \underline{p} ; di fatto vengono trasformate il doppio delle coordinate e ciò giustifica la mancata covarianza generale.

Noi ci occuperemo quindi del sottoinsieme di trasformazioni su cui vi è covarianza.

Definizione 12.7 – Trasformazioni completamente canoniche

Si dicono *trasformazioni completamente canoniche*, le trasformazioni del tipo (1) che preservano le equazioni di Hamilton per la generica hamiltoniana $\mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p})$.

Notazione. Da questo momento faremo riferimento a tali trasformazioni con il solo aggettivo canoniche, pur facendo sempre riferimento a trasformazioni completamente canoniche.

Definizione 12.8 – Funzione generatrice

Consideriamo una legge di trasformazione del tipo (1). Si definisce *funzione generatrice* una mappa F tale che

$$\underline{p} \cdot d\underline{q} - \underline{P} \cdot d\underline{Q} = dF.$$

Notazione. Le funzioni generatrici si distinguono in quattro tipologie: di I, II, III e IV specie.

Osservazione. La condizione che definisce le funzioni generatrici sarà chiarita dalla prossima proposizione.

Proposizione 12.9 – Condizione sufficiente per le trasformazioni canoniche

Sia F una funzione generatrice. Supponiamo di avere una legge di trasformazione del tipo (1) che soddisfa la condizione di F , diremo che è generata da F . Allora tale legge di trasformazione è canonica.

Dimostrazione. Un modo per garantire che le equazioni di Hamilton vengano preservate dalle trasformazioni (1) è che valga

$$S_{t_1, t_2}^{\mathcal{H}}[(\underline{q}(t), \underline{p}(t))] = S_{t_1, t_2}^{\tilde{\mathcal{H}}}[(\underline{Q}(t), \underline{P}(t))] + C \quad \text{con} \quad \begin{cases} \underline{Q}(t) = \underline{Q}(\underline{q}(t), \underline{p}(t)) \\ \underline{P}(t) = \underline{P}(\underline{q}(t), \underline{p}(t)) \end{cases}, \quad (2)$$

dove C è una costante che, in generale, dipende dagli estremi $(\underline{q}_1, \underline{p}_1), (\underline{q}_2, \underline{p}_2)$ ma non dalla traiettoria della curva. Osserviamo che, esplicitamente, la condizione (2) equivale a

$$\int_{\tilde{\Gamma}} (\underline{p} \cdot d\underline{q} - \mathcal{H} dt) = \int_{\tilde{\Gamma}} (\underline{P} \cdot d\underline{Q} - \tilde{\mathcal{H}} dt) + \int_{\tilde{\Gamma}} dF,$$

dove C ha assunto la forma dell'integrale di un differenziale esatto, che rispetta le condizioni che avevamo richiesto. Pertanto, un modo per garantire che la (2) valga, per ogni coppia di $(\mathcal{H} \longleftrightarrow \tilde{\mathcal{H}})$, è di chiedere che

$$\underline{p} \cdot d\underline{q} - \mathcal{H} dt = \underline{P} \cdot d\underline{Q} - \tilde{\mathcal{H}} dt + dF.$$

Per costruzione $\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}}$, in quanto

$$\tilde{\mathcal{H}}(\underline{Q}, \underline{P}) = \mathcal{H}(\underline{q}(\underline{Q}, \underline{P}), \underline{p}(\underline{Q}, \underline{P})).$$

Quindi la condizione precedente si riscrive come

$$\underline{p} \cdot d\underline{q} = \underline{P} \cdot d\underline{Q} + dF \iff \underline{p} \cdot d\underline{q} - \underline{P} \cdot d\underline{Q} = dF.$$

Ovvero la legge di trasformazione è generata da F . □

Procediamo ora con una descrizione delle quattro tipologie di funzioni generatrici. Osserveremo che, una volta definita la prima, le altre sfruttano la medesima logica.

Definizione 12.10 – Funzione generatrice di prima specie

$F = F(\underline{q}, \underline{Q})$ si definisce *funzione generatrice di prima specie* se soddisfa le seguenti condizioni

$$\begin{cases} \underline{p} = \frac{\partial F}{\partial \underline{q}}(\underline{q}, \underline{Q}) \\ \underline{P} = -\frac{\partial F}{\partial \underline{Q}}(\underline{q}, \underline{Q}) \end{cases}$$

e se la prima di tali condizioni è invertibile rispetto a \underline{Q} .

Proprietà 12.11. Le funzioni generatrici di prima specie sono funzioni generatrici di trasformazioni canoniche.

Dimostrazione. Consideriamo la mappa $F = F(\underline{q}, \underline{Q})$, avremo

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \underline{q}} \cdot d\underline{q} + \frac{\partial F}{\partial \underline{Q}} \cdot d\underline{Q}.$$

Quindi la condizione affinché F sia una funzione generatrice è soddisfatta se e solo se vengono soddisfatte le condizioni di definizione di F , infatti

$$\underline{p} \cdot d\underline{q} - \underline{P} \cdot d\underline{Q} = dF \iff \begin{cases} \underline{p} = \frac{\partial F}{\partial \underline{q}}(\underline{q}, \underline{Q}) \\ \underline{P} = -\frac{\partial F}{\partial \underline{Q}}(\underline{q}, \underline{Q}) \end{cases}$$

Supponiamo ora che la prima relazione si invertibile rispetto a \underline{Q} . Pertanto avremo $\underline{Q} = \underline{Q}(\underline{q}, \underline{p})$. Sostituendo tale trasformazione nella seconda relazione si ottiene

$$\underline{P} = -\frac{\partial F}{\partial \underline{Q}}(\underline{q}, \underline{Q}) = -\frac{\partial F}{\partial \underline{Q}}(\underline{q}, \underline{Q}(\underline{q}, \underline{p})) \equiv \underline{P}(\underline{q}, \underline{p}).$$

Se tale procedura ci fornisce una relazione del tipo (1), allora tale costruzione è automaticamente canonica. \square

Esempio (Scambio delle coordinate). Consideriamo la funzione generatrice di I specie

$$F(\underline{q}, \underline{Q}) = \underline{q} \cdot \underline{Q}.$$

Imponendo le condizioni si ottiene

$$\begin{cases} \underline{p} = \frac{\partial}{\partial \underline{q}}(\underline{q} \cdot \underline{Q}) = \underline{Q} \\ \underline{P} = -\frac{\partial}{\partial \underline{Q}}(\underline{q} \cdot \underline{Q}) = -\underline{q} \end{cases} \iff \begin{cases} \underline{Q} = \underline{p} \\ \underline{P} = -\underline{q} \end{cases}$$

Quindi, tramite una trasformazione canonica, abbiamo ottenuto una legge in cui il ruolo di momenti e posizioni sono scambiati. Ciò nonostante la struttura e la validità del moto è mantenuta inalterata.

Definizione 12.12 – Funzione generatrice di seconda specie

$G = G(\underline{q}, \underline{P})$ si definisce *funzione generatrice di seconda specie* se soddisfa le seguenti condizioni

$$\begin{cases} \underline{p} = \frac{\partial G}{\partial \underline{q}}(\underline{q}, \underline{P}) \\ \underline{Q} = \frac{\partial G}{\partial \underline{P}}(\underline{q}, \underline{P}) \end{cases}$$

e se la prima di tali condizioni è invertibile rispetto a \underline{P} .

Proprietà 12.13. Le funzioni generatrici di seconda specie sono funzioni generatrici di trasformazioni canoniche.

Dimostrazione. Scrivendo

$$\underline{P} \cdot d\underline{Q} = d(\underline{P} \cdot \underline{Q}) - \underline{Q} \cdot d\underline{P},$$

e sostituendo nella condizione delle funzioni generatrici, otteniamo

$$\underline{p} \cdot d\underline{q} - \underline{P} \cdot d\underline{Q} = dF \iff \underline{p} \cdot d\underline{q} + \underline{Q} \cdot d\underline{P} = d(F - \underline{P} \cdot \underline{Q}) \equiv dG,$$

dove $G = G(\underline{q}, \underline{P})$. A questo punto è sufficiente applicare la dimostrazione per le funzioni generatrici di prima specie a G per ottenere la tesi. \square

Esempio (Funzione generatrice della trasformazione identica). La trasformazione identica è generata dalla trasformazione di II specie

$$G(\underline{q}, \underline{P}) = \underline{q} \cdot \underline{P},$$

infatti si ottiene

$$\begin{cases} \underline{p} = \frac{\partial}{\partial \underline{q}}(\underline{q} \cdot \underline{P}) = \underline{P} \\ \underline{Q} = \frac{\partial}{\partial \underline{P}}(\underline{q} \cdot \underline{P}) = \underline{q} \end{cases} \iff \begin{cases} \underline{Q} = \underline{q} \\ \underline{P} = \underline{p} \end{cases}$$

Definizione 12.14 – Funzione generatrice di terza specie

$\psi = \psi(\underline{p}, \underline{Q})$ si definisce *funzione generatrice di terza specie* se soddisfa le seguenti condizioni

$$\begin{cases} \underline{q} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{p}}(\underline{p}, \underline{Q}) \\ \underline{P} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{Q}}(\underline{p}, \underline{Q}) \end{cases}$$

e se la prima di tali condizioni è invertibile rispetto a \underline{Q} .

Proprietà 12.15. Le funzioni generatrici di terza specie sono funzioni generatrici di trasformazioni canoniche.

Dimostrazione. Scrivendo

$$\underline{p} \cdot d\underline{q} = d(\underline{p} \cdot \underline{q}) - \underline{q} \cdot d\underline{p},$$

e sostituendo nella condizione delle funzioni generatrici, otteniamo

$$\underline{p} \cdot d\underline{q} - \underline{P} \cdot d\underline{Q} = dF \iff \underline{q} \cdot d\underline{p} + \underline{P} \cdot d\underline{Q} = d(-F + \underline{p} \cdot \underline{q}) \equiv d\psi$$

dove $\psi = \psi(\underline{p}, \underline{Q})$. A questo punto è sufficiente applicare la dimostrazione per le funzioni generatrici di prima specie a ψ per ottenere la tesi. \square

Definizione 12.16 – Funzione generatrice di quarta specie

$\phi = \phi(\underline{p}, \underline{P})$ si definisce *funzione generatrice di quarta specie* se soddisfa le seguenti condizioni

$$\begin{cases} \underline{q} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{p}}(\underline{p}, \underline{P}) \\ \underline{Q} = -\frac{\partial \phi}{\partial \underline{P}}(\underline{p}, \underline{P}) \end{cases}$$

e se la prima di tali condizioni è invertibile rispetto a \underline{P} .

Proprietà 12.17. Le funzioni generatrici di quarta specie sono funzioni generatrici di trasformazioni canoniche.

Dimostrazione. Scrivendo

$$\underline{p} \cdot d\underline{q} = d(\underline{p} \cdot \underline{q}) - \underline{q} \cdot d\underline{p} \quad \text{e} \quad \underline{P} \cdot d\underline{Q} = d(\underline{P} \cdot \underline{Q}) - \underline{Q} \cdot d\underline{P},$$

e sostituendo nella condizione delle funzioni generatrici, otteniamo

$$\underline{p} \cdot d\underline{q} - \underline{P} \cdot d\underline{Q} = dF \iff \underline{q} \cdot d\underline{p} - \underline{Q} \cdot d\underline{P} = d(-F + \underline{p} \cdot \underline{q} - \underline{P} \cdot \underline{Q}) \equiv d\phi,$$

dove $\phi = \phi(\underline{p}, \underline{P})$. A questo punto è sufficiente applicare la dimostrazione per le funzioni generatrici di prima specie a ϕ per ottenere la tesi. \square

12.3 EQUAZIONE DI HAMILTON-JACOBI

Immaginiamo di avere una legge di trasformazione della posizione che riguardi solo la posizione, ovvero $\underline{Q} = \underline{Q}(\underline{q})$. Per ottenere una trasformazione canonica tale che la trasformazione delle posizioni abbia questa forma, possiamo generarla tramite la funzione generatrice di seconda specie

$$G(\underline{q}, \underline{P}) = \underline{Q}(\underline{q}) \cdot \underline{P}.$$

Infatti, imponendo le condizioni derivanti da G , otteniamo

$$\begin{cases} \underline{p} = \frac{\partial Q}{\partial \underline{q}} \underline{P} \\ \underline{Q} = \underline{Q}(\underline{q}), \end{cases}$$

dove la prima relazione può essere letta in coordinate come

$$p_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} P_j \equiv (M \underline{P})_i \quad \text{dove } M_{ij}(\underline{q}) = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}(\underline{q})$$

è la matrice jacobiana della trasformazione $\underline{Q}(\underline{q})$. Da cui otteniamo la seguente definizione

Definizione 12.18 – Trasformazioni canoniche puntuali

Una trasformazione canonica si dice *puntuale* se è della forma

$$\begin{cases} \underline{Q} = \underline{Q}(\underline{q}) \\ \underline{P} = M^{-1}(\underline{q}) \underline{p}, \end{cases}$$

dove $M(\underline{q})$ è la matrice jacobiana della trasformazione $\underline{Q}(\underline{q})$.

Osservazione. Nel contesto lagrangiano queste trasformazioni, che riguardavano solo la posizione, erano accompagnate dalle trasformazioni della velocità da esse indotte:

$$\underline{\dot{Q}} = \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{q}} \cdot \underline{\dot{q}}.$$

L'interesse pratico per trasformazioni che preservano le equazioni di Hamilton riguarda la risoluzione di queste ultime. L'idea, assegnate delle equazioni di Hamilton in generali difficili da risolvere, è quella di cercare nuove coordinate, legate alle precedenti da una trasformazione canonica, sulle quali le equazioni di Hamilton siano banali da risolvere.

Un caso in cui ciò accade è quello dove $\tilde{\mathcal{H}}(\underline{Q}, \underline{P}) = \tilde{\mathcal{H}}(\underline{P})$ è indipendente dalle \underline{Q} . In tal caso, per le equazioni di Hamilton, si ha

$$\dot{\underline{P}} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \underline{Q}} = 0 \implies \underline{P}(t) = \underline{P}_0$$

e, di conseguenza,

$$\underline{\dot{Q}} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \underline{P}}(\underline{P}_0) = \underline{V}(\underline{P}_0) \implies \underline{Q}(t) = \underline{Q}_0 + \underline{V}(\underline{P}_0) t.$$

Cerchiamo quindi una trasformazione canonica generata da una funzione generatrice di II specie $G(\underline{q}, \underline{P})$ che abbia che proprietà. In particolare vorremmo che, tramite le condizioni

$$\begin{cases} \underline{p} = \frac{\partial G}{\partial \underline{q}}(\underline{q}, \underline{P}) \\ \underline{Q} = \frac{\partial G}{\partial \underline{P}}(\underline{q}, \underline{P}) \end{cases}$$

si abbia $\mathcal{H}(\underline{q}(\underline{Q}, \underline{P}), \underline{p}(\underline{Q}, \underline{P})) = \tilde{\mathcal{H}}(\underline{P})$. Sostituendo \underline{p} tramite le condizioni della funzione generatrice, si ottiene

$$\mathcal{H}\left(\underline{q}(\underline{Q}, \underline{P}), \frac{\partial G}{\partial \underline{q}}(\underline{q}(\underline{Q}, \underline{P}), \underline{P})\right) = \tilde{\mathcal{H}}(\underline{P})$$

Equazione di Hamilton-Jacobi

Osservazione. La possibilità di sfruttare le equazioni di Hamilton-Jacobi per risolvere in modo sistematico le equazioni di Hamilton, giustifica il formalismo Hamiltoniano. Tale possibilità non esiste infatti nel contesto lagrangiano. Ciò nonostante non è detto che l'equazione di Hamilton-Jacobi ammetta sempre soluzione.

Esempio. Consideriamo la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{4} q^2 \dot{q}^2 e^{q^2}.$$

Ricaviamo l'hamiltoniana associata ad \mathcal{L} e scriviamo le equazioni di Hamilton corrispondenti. Per definizione

$$\mathcal{H}(q, p) = p \dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q}),$$

dove

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{2} q^2 \dot{q} e^{q^2} \iff \dot{q} = \frac{2p}{q^2} e^{-q^2},$$

con p che è invertibile rispetto a \dot{q} per $q \in (0, +\infty)$ oppure $q \in (-\infty, 0)$. Scegliamo la prima determinazione, segue

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{2p^2}{q^2} e^{-q^2} - \frac{1}{4} q^2 \frac{4p^2}{q^4} e^{-2q^2} e^{q^2} = \frac{p^2}{q^2} e^{-q^2}.$$

Da cui le equazioni di Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{2p}{q^2} e^{-q^2} \\ \dot{p} = \frac{2p^2}{q} e^{-q^2} \left(1 + \frac{1}{q^2}\right) \end{cases}$$

Risolviamo ora le equazioni di Hamilton tramite coordinate opportune, queste ultime trovate sfruttando le equazioni di Hamilton-Jacobi. Scegliamo arbitrariamente, in modo da semplificarci i calcoli, $\tilde{\mathcal{H}}(P) = P^2$. Applicando l'equazione di Hamilton-Jacobi avremo

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial G}{\partial q}\right) = \tilde{\mathcal{H}}(P) = P^2 \iff \frac{1}{q^2} e^{-q^2} \left(\frac{\partial G}{\partial q}\right)^2 = P^2,$$

da cui

$$\left(\frac{\partial G}{\partial q}\right)^2 = q^2 p^2 e^{q^2} \implies \frac{\partial G}{\partial q} = \pm q P e^{\frac{q^2}{2}}.$$

Scegliamo la determinazione positiva della radice per ottenere

$$\frac{\partial G}{\partial q} = q P e^{\frac{q^2}{2}} \implies G(q, P) = P e^{\frac{q^2}{2}}.$$

Con tale scelta, imponendo le condizioni delle funzioni generatrici del II tipo, otteniamo

$$\begin{cases} p = \frac{\partial G}{\partial q}(q, P) = q P e^{\frac{q^2}{2}} \\ Q = \frac{\partial G}{\partial P}(q, P) = e^{\frac{q^2}{2}} \end{cases} \iff \begin{cases} Q = e^{\frac{q^2}{2}} \\ P = \frac{p}{q} e^{-\frac{q^2}{2}} \end{cases}$$

che, come ci aspettavamo, è una trasformazione puntuale. Osserviamo inoltre che

$$(q, p) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} \longleftrightarrow (Q, P) \in (1, +\infty) \times \mathbb{R}.$$

La trasformazione inversa si ottiene facilmente:

$$\begin{cases} q = \sqrt{2 \ln Q} \\ p = P Q \sqrt{2 \ln Q} \end{cases}$$

Nelle nuove coordinate, per costruzione $\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{P}) = P^2$, da cui otteniamo le equazioni di Hamilton

$$\begin{cases} \dot{Q} = 2P \\ \dot{P} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} Q(t) = Q_0 + 2P_0 t \\ P(t) = P_0 \end{cases} \quad \text{con } Q(t) > 1 \iff t > \frac{1 - Q_0}{2P_0}.$$

Tornando alle coordinate iniziali otteniamo

$$\begin{cases} q(t) = \sqrt{2 \ln(Q_0 + 2P_0 t)} \\ p(t) = P_0(Q_0 + 2P_0 t) \sqrt{2 \ln(Q_0 + 2P_0 t)} \end{cases}$$

che risolvono il moto.

12.4 CARATTERIZZAZIONE DELLE TRASFORMAZIONI CANONICHE

Teorema 12.19 – Caratterizzazione delle trasformazioni canoniche

Una trasformazione $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \longleftrightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ è canonica se e soltanto se la matrice jacobiana M della trasformazione soddisfa

$$M J^t M = J,$$

dove J è la matrice simplettica standard.

Dimostrazione. Siano $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ soluzioni delle equazioni di Hamilton associate all'hamiltoniana \mathcal{H} . Dalla legge di trasformazione, derivando otteniamo

$$\begin{cases} \underline{Q}(t) = \underline{Q}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \\ \underline{P}(t) = \underline{P}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{\underline{Q}} = \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{q}} \dot{\underline{q}} + \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{p}} \dot{\underline{p}} \\ \dot{\underline{P}} = \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{q}} \dot{\underline{q}} + \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{p}} \dot{\underline{p}} \end{cases}$$

da cui, sostituendo le equazioni di Hamilton per $\dot{\underline{q}}$ e $\dot{\underline{p}}$, si ottiene

$$\begin{cases} \dot{\underline{Q}} = \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{q}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}} - \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{p}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q}} \\ \dot{\underline{P}} = \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{q}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}} - \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{p}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q}} \end{cases}$$

Introduciamo la matrice di jacobiani della trasformazione, adottando una notazione di matrice a blocchi:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{q}} & \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{p}} \\ \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{q}} & \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

dove A, B, C, D sono matrici $n \times n$. Pertanto, sfruttando tale notazione nella scrittura di $\dot{\underline{Q}}$ e $\dot{\underline{P}}$, avremo

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \sum_j (A_{ij} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} - B_{ij} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}) \\ \dot{P}_i = \sum_j (C_{ij} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} - D_{ij} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}) \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{\underline{Q}} = A \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}} - B \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q}} \\ \dot{\underline{P}} = C \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}} - D \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q}} \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} \dot{\underline{Q}} \\ \dot{\underline{P}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}} \\ -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q}} \end{pmatrix}$$

Adottiamo la seguente notazione per il resto della dimostrazione:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{q} \\ \underline{p} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{X} = \begin{pmatrix} \underline{Q} \\ \underline{P} \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che il campo vettoriale hamiltoniano, può essere riscritto tramite la matrice simplettica standard J :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}} \\ -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id} \\ \text{Id} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}} \end{pmatrix} \equiv J \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{x}}$$

In questi termini, le equazioni del moto hanno la seguente forma sintetica

$$\dot{\underline{X}} = M J \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{x}}$$

A questo punto vogliamo imporre la seguente condizione

$$M J \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{x}} = J \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \underline{X}}.$$

Da $\mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p}) = \tilde{\mathcal{H}}(\underline{Q}(\underline{q}, \underline{p}), \underline{P}(\underline{q}, \underline{p}))$, otteniamo

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q}} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \underline{Q}} \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{q}} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \underline{P}} \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \underline{Q}} \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{p}} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \underline{P}} \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{p}} \end{cases}$$

Sfruttando la definizione di M data in precedenza, avremo

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \sum_j A_{ji} \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} + C_{ji} \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_j} = \sum_j ({}^t A)_{ij} \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} + ({}^t C)_{ij} \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_j} \implies \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q}} = {}^t A \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \underline{Q}} + {}^t C \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \underline{P}}$$

e, analogamente,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}} = {}^t B \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \underline{Q}} + {}^t D \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \underline{P}}.$$

Tali scritte, in forma compatta, diventano

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} {}^t A & {}^t C \\ {}^t B & {}^t D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \underline{Q}} \\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \underline{P}} \end{pmatrix} = {}^t M \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \underline{X}}$$

che, sostituita nell'equazione del moto, ci permette di scrivere

$$\dot{\underline{X}} = M J \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{x}} = M J {}^t M \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \underline{X}}.$$

La quale soddisfa la condizione imposta in precedenza se e soltanto se

$$M J {}^t M = J. \quad \square$$

Definizione 12.20 – Matrice simplettica

Una matrice M , di dimensioni $2n \times 2n$, si dice *simplettica* se soddisfa

$$M J {}^t M = J,$$

dove J è la matrice simplettica standard.

Osservazione. La matrice simplettica standard è una matrice simplettica, infatti se prendiamo $M = J$, avremo

$$MJ^tM = JJ^tJ = J^2{}^tJ.$$

Ora

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id} \\ \text{Id} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id} \\ \text{Id} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{Id} & 0 \\ 0 & -\text{Id} \end{pmatrix} = -\text{Id}_{2n}$$

da cui

$$J^2{}^tJ = -{}^tJ = J$$

in quanto J è antisimmetrica.

Proprietà 12.21. Sia M una matrice simplettica. Allora

$$\det M = 1$$

Dimostrazione. Dimostriamo con un argomento semplice che $\det M = \pm 1$, per dimostrare completamente la tesi è necessario qualche sforzo ulteriore. Calcoliamo inizialmente il determinante di J :

$$\det J = \det \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id} \\ \text{Id} & 0 \end{pmatrix} = (-1)^n \det \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & -\text{Id} \end{pmatrix} = (-1)^n (-1)^n = 1 \forall n.$$

A questo punto, per calcolare il determinante di M , sfruttiamo la condizione delle matrici simplettiche

$$\det(MJ^tM) = \det J \iff \det M \det {}^tM = 1 \iff (\det M)^2 = 1,$$

da cui

$$\det M = \pm 1. \quad \square$$

Proprietà 12.22. Sia M una matrice simplettica. Allora

$$M^{-1} = -J^tM J.$$

Dimostrazione. Dalla definizione di matrice simplettica $MJ^tM = J$, da cui

$$J^tM = M^{-1}J \implies J^tM J^{-1} = M^{-1},$$

ovvero, dal momento che J è antisimmetrica,

$$M^{-1} = -J^tM J. \quad \square$$

Proposizione 12.23 – Conservazione delle parentesi di Poisson fondamentali

Una trasformazione $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \longleftrightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ è canonica se e soltanto se preserva le parentesi di Poisson fondamentali, ovvero

$$\{Q_i, Q_j\} = 0; \quad \{P_i, P_j\} = 0; \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{i,j}.$$

Dimostrazione. Detta M la matrice jacobiana della trasformazione, sappiamo che la

trasformazione è canonica se e soltanto se

$$MJ^tM = J,$$

con J la matrice simplettica standard. Tale condizione può essere riscritta come segue:

$$\begin{aligned} MJ^tM &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id} \\ \text{Id} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -{}^tB & -{}^tD \\ {}^tA & {}^tC \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -A{}^tB + B{}^tA & -A{}^tD + B{}^tC \\ -C{}^tB + D{}^tA & -C{}^tD + D{}^tC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id} \\ \text{Id} & 0 \end{pmatrix} = J. \end{aligned}$$

Da cui si ottengono tre condizioni:

$$A{}^tB - B{}^tA = 0; \quad C{}^tD - D{}^tC = 0; \quad A{}^tD - B{}^tC = \text{Id}.$$

Ricordando l'espressione di A, B , la prima condizione diventa

$$\sum_k A_{ik}({}^tB)_{kj} - B_{ik}({}^tA)_{kj} = 0 \iff \sum_k (A_{ik}B_{jk} - B_{ik}A_{jk}) = 0,$$

da cui

$$\sum_k \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} \right) = 0 \iff \{Q_i, Q_j\} = 0.$$

Analogamente la seconda condizione ci dice

$$C{}^tD - D{}^tC = 0 \iff \{P_i, P_j\} = 0.$$

Infine, per la terza condizione, si ha

$$A{}^tD - B{}^tC = \text{Id} \iff \sum_k (A_{ik}D_{jk} - B_{ik}C_{jk}) = \delta_{ij},$$

da cui

$$\sum_k \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) = \delta_{i,j} \iff \{Q_i, P_j\} = \delta_{i,j}.$$

Pertanto abbiamo dimostrato che la trasformazione è canonica se e soltanto se sono preservate le parentesi di Poisson fondamentali. \square

INDICE ANALITICO

- Azione di Hamilton, 94
- Centro di massa, 29
- Corpo rigido, 76
- Curva di livello, 26
- Densità lagrangiana, 46
- Energia generalizzata, 62
- Energia meccanica, 8
- Equazione di Hamilton-Jacobi, 101
- Equazioni di Eulero-Lagrange, 49
- Equazioni di Hamilton, 89
- Forza centrale, 28
 - attrattiva, 28
 - repulsiva, 28
- Frequenze normali, 16
- Funzionale d'azione, 46
- Funzione di Hamilton, 87
- Funzione generatrice, 97
- Lagrangiana
 - di Routh, 66
 - regolare, 86
- Leggi di Eulero
 - prima legge, 81
 - seconda legge, 82
- Massa ridotta, 29
- Matrice d'inerzia, 78
- Matrice simplettica, 104
- Momento coniugato, 64
- Moto vincolato, 54
- Osservabile, 91
- Parentesi di Poisson, 91
- Potenziale efficace, 34
- Principio di D'Alembert, 57
- Punto di equilibrio, 10
 - asintoticamente stabile, 14
- Sistema
 - di forze conservative, 6
- Spazio dei moti, 45
- Spazio delle variazioni, 47
- Stabilità
 - secondo Ljapunov, 11
- Teorema
 - di Dirichlet, 11
 - di König, 78
 - di Liouville, 90
 - di Nöther, 68
- Trasformazioni canoniche, 97
 - puntuali, 101
- Variabile ciclica, 64
- Variazione traiettoria, 46
- Vincoli, 55
 - ideali, 57
 - regolari, 55